CPES Chapitre I

Rédaction-logique

année scolaire 2020-2021

I-1 Vocabulaire et symboles

I-1.1 Traduction en langage mathématique

Exercice I-1

On considère les quatre assertions suivantes :

— F : je vais en forêt ;
— B : je bois une limonade ;
— J : je joue au foot ;
— M : je fais de la musique.

Exprimer sous forme symbolique les phrases suivantes :

1. je vais en forêt et je bois une limonade mais je ne fais pas de musique ;
2. quand je vais en forêt je ne bois pas de limonade ;
3. chaque fois que je joue au foot, je ne vais pas en forêt mais je bois une limonade ;
4. si je joue au foot ou si je bois une limonade, alors je ne vais pas en forêt ;
5. il suffit que je joue de la musique pour que je joue au foot ;
6. il faut que je joue au foot et que je boive une limonade pour que j'aille en forêt ;
7. une condition nécessaire pour que je boive une limonade et que j'aille en forêt est que je joue au foot ;
8. je vais en forêt et je bois une limonade si et seulement si je joue au foot ou je fais de la musique ;
9. de deux choses l'une : soit je bois une limonade et je joue au foot, soit, si je fais de la musique alors je ne vais pas en forêt.

Exercice I-2

Traduire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes, et les commenter :

1. « Il existe un réel x tel que pour tout réel y, le produit xy soit différent de 1 ».
2. On considère E et F deux sous-ensembles d'un même ensemble X. « Pour tout x dans X, nous avons x qui est soit dans E soit dans F » (traiter le cas avec « soit dans les deux » et celui avec « mais pas dans les deux »).

Exercice I-3

On considère f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

1. la fonction f est majorée.
2. la fonction f est bornée.
3. la fonction f (définie sur $\mathcal{D}$) est paire.
4. la fonction f (définie sur $\mathcal{D}$) est impaire.
5. la fonction f ne s'annule jamais.
6. la fonction f est périodique.
7. la fonction f est croissante.
8. la fonction f est strictement décroissante.
9. la fonction f n'est pas la fonction nulle.
10. la fonction f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts.
11. la fonction f atteint tous les entiers.
12. la fonction f est inférieure à g.
13. la fonction f n'est pas inférieure à g.

I-1.2 Traduction en français

Exercice I-4

Traduire par une phrase en français les propositions suivantes, et les commenter :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 1$.
2. $\exists x \in A,\ x \in A \Rightarrow x \notin B$.
3. $\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ x = yz$. Que se passe-t-il si l'on change les quantificateurs ?

Exercice I-5

Exprimer les assertions suivantes en langage courant. Dire si elles sont vraies ou fausses (et justifier la réponse). Dans les cas d'une assertion fausse, en donner la négation :

1. $\forall x \in]0\ ;\ 1]\,,\ \exists y \in]0\ ;\ 1]\,,\ y < x$.
2. $\forall x \in]0\ ;\ 1]\,,\ \exists y \in]0\ ;\ 1]\,,\ x < y$.

I-1.3 Quantificateurs

Exercice I-6

On considère A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble. Commentez les deux propositions suivantes :

1. $\forall a \in A,\ \exists b \in B,\ a = b$.
2. $\exists b \in B,\ \forall a \in A,\ a = b$.

Exercice I-7

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y^2$;
2. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y^2$;
3. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y^2$;
4. $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{Z},\ x \leqslant y^2$;
5. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y^2$.

I-1.4 Négation

Exercice I-8

Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes, puis donner leur négation.

1. On considère f une application du plan dans lui-même :
   (a) f est l'identité du plan.
   (b) f admet au moins un point invariant (appelé aussi point fixe).
2. f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
   (a) f est l'application nulle.
   (b) L'équation $f(x) = 0$ admet une solution.
   (c) L'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution.

Exercice I-9

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis donner sa négation.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$.

Exercice I-10

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier de la manière la plus précise possible les énoncés qui suivent :

1. Pour tour x réel, $f(x) \leqslant 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante positive.
4. Il existe un réel positif x tel que $f(x) \leqslant 0$.
5. Il existe un réel x tel que pour tout réel y, si $x < y$, alors $f(x) > f(y)$.

Exercice I-11

Écrire la négation des propositions suivantes :

1. $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$;
2. $\forall x_0 \in \mathbb{Z},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
3. $\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{N}^*,\ \exists q \in \mathbb{Z},\ \exists r \in \mathbb{Z},\ (a = bq + r)$ et $(0 \leqslant r < b)$.

Exercice I-12

Soient x et y deux nombres réels. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leqslant x \leqslant y$;
2. $xy = 0$ (avec des propositions portant séparément sur x et/ou sur y) ;
3. $x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$.

I-1.5 Connecteurs logiques

Exercice I-13

1. Laquelle des formules ci-dessous est équivalente à
$$P \text{ ET } (P \text{ OU } Q).$$
   (a) P ET Q,
   (b) P OU Q,
   (c) P,
   (d) Q.
2. Même question avec la relation suivante :
$$(P \text{ ET } Q) \text{ OU } P.$$
   (a) P ET Q,
   (b) P OU Q,
   (c) P,
   (d) Q.

Exercice I-14

On considère trois propriétés P, Q et R. Dresser les tables de vérité des assertions suivantes :

1. P OU (Q ET R),
2. NON $(P \Rightarrow Q)$,
3. (P OU Q) ET (P OU R),

Exercice I-15

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La négation de « f est une fonction impaire » est « f est une fonction paire ».
2. Lorsque (P ET Q) est vraie, alors (P OU Q) l'est également. Et inversement ?
3. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$.
4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon$.

I-1.6 Implications logiques

Exercice I-16

Examiner les relations logiques entre les assertions suivantes, et donner les relations (équivalences et implications) qui les lient :

— A : tous les hommes sont mortels ;
— B : tous les hommes sont immortels ;
— C : aucun homme n'est mortel ;
— D : aucun homme n'est immortel ;
— E : il existe des hommes immortels ;
— F : il existe des hommes mortels.

Exercice I-17

On considère A et B deux propriétés. Traduire avec des implication (éventuellement double) les phrases suivantes :

1. Pour avoir A, il est nécessaire et suffisant d'avoir B.
2. Pour avoir A il est nécessaire d'avoir B.
3. Pour avoir A il est suffisant d'avoir B.
4. Si on a A alors on a B.
5. On a A seulement si on a B.
6. On a A si on a B.

7. On a A si et seulement si on a B.

Exercice I-18

Pierrot le fou entre dans un café et proclame les deux propositions suivantes :

A: *« Paris est la capitale de la planète Mars »*
et
B: *« La lune est un plat qui se mange chaud »*.

Il est bien évident que ces deux propositions sont toutes deux fausses...

1. La proposition $A \Rightarrow B$ est-elle vraie ?
2. La proposition $A \Leftrightarrow B$ est-elle vraie ?
3. La proposition NON $(A \text{ ET } B)$ est-elle vraie ?
4. La proposition NON $(B) \Rightarrow A$ est-elle vraie ?

Exercice I-19

Soient R et S deux propriétés. Montrer que si R est fausse, alors $R \Rightarrow S$ est vraie. Peut-on en déduire que S est vraie ?

I-2 Types de démonstration

I-2.1 Schémas de démonstration

Exercice I-20

On cherche à montrer qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admet une limite l quand x tend vers $+\infty$. Pour cela on applique la méthode ci-dessous :
— on commence par choisir un réel ε strictement positif ;
— on montre que l'on peut trouver un réel M tel que, si x est plus grand que M, alors la distance entre $f(x)$ et l est inférieure à ε.

1. Écrire cette propriété en langage mathématique.
2. Appliquer le raisonnement ci-dessus pour montrer que la fonction inverse tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice I-21

On rappelle la définition (en langage mathématique) de la continuité d'une fonction f (définie sur $\mathbb{R}$) en un réel a :

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \eta > 0), (\forall x \in \mathbb{R}),$$
$$(|x - a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

1. Traduire la propriété ci-dessus en français.
2. Donner les étapes successives à mettre en œuvre permettant de prouver qu'une fonction f est continue en un réel a.
3. Appliquet la méthode pour prouver que la fonction affine $f : x \mapsto 2x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue en 2.

Exercice I-22

On considère une fonction f définie sur un intervalle I. On donne les définitions de la continuité sur un intervalle I et de la continuité uniforme[1] sur un intervalle I :

continuité

$$(\forall \varepsilon > 0), (\forall a \in I), (\exists \eta > 0), (\forall x \in I),$$
$$(|x - a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon);$$

continuité uniforme

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \eta > 0), (\forall a \in I), (\forall x \in I),$$
$$(|x - a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

1. Comparer les deux définitions dans le détail et dire ce qui change entre elles. Qu'est-ce que cela va impliquer concernant le raisonnement ?
2. Montrer qu'une fonction uniformément continue sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.
3. Pourquoi la réciproque n'est pas toujours vraie ?

I-2.2 Analyse - synthèse

Exercice I-23

Déterminer toutes les applications f définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(n + m) = f(n) + f(m)$.

Exercice I-24

Déterminer toutes les applications f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.

Exercice I-25

Montrer que toute fonction réelle est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

I-2.3 Raisonnements directs

Commençons par quelques exercices simples consistant à prouver par une rédaction **rigoureuse** les résultats énoncés.

Exercice I-26

La fonction carré est décroissante sur l'ensemble des réels négatifs. On n'utilisera **pas** les propriétés de la dérivation...

Exercice I-27

Rappelons le théorème d'encadrement (appelé aussi « théorème des gendarmes »)

Théorème I-2.1 *Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de α (avec α qui désigne $-\infty$, $+\infty$ ou un réel a). Soit l un réel.*

Si $\lim_{x\to\alpha} g(x) = l$, $\lim_{x\to\alpha} h(x) = l$ et pour tout x dans un voisinage de α, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = l. \tag{1}$$

1. Cette notion sera vue ultérieurement mais il n'est nullement besoin d'en connaître davantage dans cet exercice.

Prouver ce théorème en rédigeant correctement la preuve dans le cas où la limite est étudiée en à $+\infty$ et dont on en rappelle le schéma.

1. On suppose que l'une des fonctions est toujours supérieure à l'autre (pourquoi peut-on le faire ?).
2. On définit un encadrement de la limite de g, et on utilise la définition de la limite pour obtenir un premier réel.
3. On utilise la limite de h pour obtenir un second réel.
4. On conclue en utilisant la définition de la limite pour f.

On commencera par traduire en langage mathématique la propriété que l'on veut montrer.

Exercice I-28

Prouver que si deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, avec $(u_n)_n$ croissante et $(v_n)_n$ décroissante, alors pour tous entiers naturels n et p, nous avons

$$u_n \leqslant v_p.$$

I-2.4 Raisonnements par l'absurde

Exercice I-29

En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Indication : *on rappelle le principe de la preuve : on suppose que $\sqrt{2}$ est une fraction irréductible. On montre alors que l'irréductibilité est impossible.*

Exercice I-30

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice I-31

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui même.

On définit une application f en posant $f(n) = f_n(n) + 1$.

Démontrer qu'il n'existe aucun entier naturel p tel que $f = f_p$.

Exercice I-32

Principe des tiroirs : démontrer que si l'on range $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs, alors nécessairement au moins un tiroir contient au moins deux paires de chaussettes.

Exercice I-33

Soit n un entier naturel non nul. On se donne $n+1$ nombres x_0, x_1,... x_n de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ tels que

$$0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1.$$

On cherche à démontrer par l'absurde la propriété :

« *il y a deux de ces réels distants de moins de $\frac{1}{n}$.* »

1. Traduire la propriété que l'on veut démontrer uniquement à l'aide de quantificateurs et de valeurs $x_i - x_{i-1}$.
2. Écrire la négation de cette propriété (en langage mathématique).
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété.
   Indication : *on pourra étudier la quantité $x_n - x_0$.*

I-2.5 Raisonnements par contraposée

Exercice I-34

Donner et commenter la contraposée, la réciproque puis la négation de la propriété :

Propriété I-2.1 *Si f est une fonction dérivable en un nombre réel a, alors f est continue en a.*

Commenter ensuite les résultats obtenus. Prouver que le résultat obtenu lors de la négation est faux.

Exercice I-35

Soit n un entier. Démontrer par contraposée les implications suivantes :

1. si n^2 est impair, alors n est impair ;
2. si n^2 est pair, alors n est pair ;

Exercice I-36

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Écrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k+r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1; 3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.
3. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

I-2.6 Récurrence

Exercice I-37

Commenter la preuve du résultat ci-dessous.

Considérons la propriété P_n définie par :

P_n : « *Pour l'entier naturel n, $7^n + 1$ est un multiple de 6.* »

Montrons que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Supposons P_n vraie, alors nous avons $7^n + 1$ qui est un multiple de 6. Comme nous avons $7^{n-1} \times 7 = 7^n$, nous pouvons écrire

$$7^{n+1} + 1 = 7^n \times 7 + 1 = (6k - 1) \times 7 + 1 = 42k - 6$$

qui est un multiple de 6 (en écrivant $7^n = 6k-1$ puisque P_n est supposée vraie).

Exercice I-38

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $2^n > n$.

Exercice I-39

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n\ :\ 2^n > n^2.$$

1. Montrer que l'implication $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ est vraie pour $n \geqslant 3$.
2. Pour quelles valeurs de n la propriété $\mathcal{P}_n$ est-elle vraie ?