CPES Chapitre II

Ensembles et relations

année scolaire 2020-2021

II-1 Ensembles

II-1.1 Notions d'ensemble

Exercice II-1

On considère l'ensemble A défini par $A = \{x \in \mathbb{R}/2x = 6\}$. Peut-on écrire $A = 3$?

II-1.2 Sous-ensembles

Exercice II-2

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Quel est le nombre de ses parties ?

Exercice II-3

Écrire l'ensemble des parties de $E = \{a, b, c, d\}$.

Exercice II-4

On considère l'ensemble $B = \{3; \{4; 1\}\}$.

1. Combien d'éléments possède-t-il ?
2. Déterminer tous ses sous-ensembles.

Exercice II-5

Soient A et B deux parties d'un même ensemble E. Montrer que

$$B \subset \overline{A} \Longleftrightarrow A \subset \overline{B}$$

et que

$$\overline{B} \subset A \Longleftrightarrow \overline{A} \subset B.$$

II-1.3 Opérations

Exercice II-6

Soient A, B et C trois ensembles. Est-ce que $A \subset (B \cup C)$ entraîne nécessairement $A \subset B$ ou $A \subset C$?

Exercice II-7

Soit E un ensemble, et soient A et B deux sous-ensembles de E. On appelle *différence symétrique* de A et de B, notée $A\Delta B$, l'ensemble

$$A\Delta B = \{x \in E/(x \in A \cup B) \text{ ET } (x \notin A \cap B)\}.$$

1. Décrire « en français » les éléments de $A\Delta B$.
2. Montrer que
$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$
3. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$ et $A\Delta\overline{A}$.
4. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un même ensemble E. Démontrer que nous avons
$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$$

Exercice II-8

Soient A et B deux ensembles. Interpréter d'abord séparément puis simultanément les relations

$$A \cup B = A \quad \text{et} \quad A \cap B = A.$$

Exercice II-9

Soit E un ensemble. Montrer que nous avons :

1. $\forall (A, B) \subset E^2,\ (A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow (A = B)$
2. $\forall (A, B, C) \subset E^3,\ ((A \cap B = A \cap C) \text{ ET } (A \cup B = A \cup C)) \Longrightarrow (B = C)$

Indication : *on pourra utiliser la contraposée.*

Exercice II-10

Soit E un ensemble et soient A et B deux sous-ensembles de E. « Résoudre » les équations suivantes, d'inconnue X :

1. $X \cup A = B$.
2. $X \cap A = B$.
3. $X \backslash A = B$.
4. $A \backslash X = B$.
5. $X\Delta A = B$.

Exercice II-11

On considére E un ensemble non vide et l'opération $\star$ définie sur $\wp(E)$ par :

$$A \star B = \overline{A}^E \cap \overline{B}^E.$$

Exprimer $\overline{A}^E$, $A \cup B$ et $A \cap B$ à l'aide de seulement l'opération $\star$.

Exercice II-12

Soit E un ensemble fini à n éléments. En admettant que si $Card(E) = n$ alors $Card(\wp(E)) = 2^n$, trouver le cardinal des ensembles suivants :

1. $F = \{(A; B) \in \wp(E) \times \wp(E)/A \cup B = E,\ A \cap B = \emptyset\}$.
2. Si A est une partie fixée de E à p éléments, $G_A = \{B \in \wp(E)/A \cup B = E\}$.
3. $H = \{(A; B) \in \wp(E) \times \wp(E)/A \cup B = E\}$.

II-2 Relations

II-2.1 Relations sur un ensemble

Exercice II-13

Déterminer si la relation définie dans $X = \{1; 2; 3\}$ par $\mathcal{R} = \{(1; 1); (2; 3); (3; 2)\}$:

— réflexive ;
— symétrique ;
— antisymétrique ;
— transitive.

Que se passe-t-il si l'on rajoute $(2, 2)$ et $(3, 3)$ à l'ensemble $\mathcal{R}$? Et si en plus on rajoute 4 à l'ensemble X ?

Exercice II-14

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant ?

$$x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x \text{ car } \mathcal{R} \text{ est symétrique,}$$

or ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) entraîne $x\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est transitive, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

Indication : *Il faut trouver l'erreur dans ce raisonnement, car bien sûr s'il y a trois axiomes pour la définition d'une relation d'équivalence, c'est que deux ne suffisent pas !*

II-2.2 Relation d'équivalence

Exercice II-15

Soit E un ensemble. Considérons la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\wp(E)$ par

$$A \ \mathcal{R} \ B \text{ défini par } (A = B) \ \text{ OU } \ (A = \overline{B}).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Donner les classes d'équivalence.

Exercice II-16

On considère l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ des couples de deux entiers naturels, et la relation $\cong$ définie dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par

$$(a; b) \cong (c; d) \text{ défini par } ad = bc.$$

Démontrer que $\cong$ est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?

Que se passe-t-il si l'on considère la relation sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (et non plus sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$) ?

Exercice II-17

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \text{ défini par } x\mathrm{e}^y = y\mathrm{e}^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x pour la relation $\mathcal{R}$.

Indication : *poser la fonction $t \mapsto \frac{t}{\mathrm{e}^t}$, après une étude de fonction on calculera le nombre d'antécédents possibles.*

II-2.3 Relation d'ordre

Exercice II-18

On définit $\blacktriangleleft$ une relation binaire sur $\mathbb{Z}$ par :

$$n \blacktriangleleft m \Longleftrightarrow \begin{cases} (n \text{ pair} \quad \text{ET} \quad m \text{ impair}) \\ \quad \text{OU} \\ (n \text{ pair} \quad \text{ET} \quad m \text{ pair} \quad \text{ET} \quad n \leqslant m) \\ \quad \text{OU} \\ (n \text{ impair} \quad \text{ET} \quad m \text{ impair} \quad \text{ET} \quad n \geqslant m) \end{cases}$$

Montrer que $\blacktriangleleft$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$. La décrire brièvement par une « simple » phrase en français. Est-ce un ordre total ? Comparer 2 et -5.

Exercice II-19

On définit une relation binaire $\lhd$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \lhd y \text{ défini par } \exists n \in \mathbb{N}, \ y = x^n.$$

Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Existe-t-il un élément plus grand (resp. plus petit) que tous les autres ?

Exercice II-20

On définit une relation binaire $\lhd$ sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Im}\ (z) \geqslant 0\}$ par :

$$z \lhd z' \text{ défini par } (|z| < |z'|) \ ou \ (|z| = |z'| \ et \ \Re e(z) \leqslant \Re e(z')).$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total.

Exercice II-21

Soit E l'ensemble des couples (I, f) formé d'un intervalle I et d'une fonction réelle f définie sur I. On définit une relation $\lhd$ sur E par :

$$(I, f) \lhd (J, g) \text{ défini par } (I \subset J \ et \ g_{|I} = f).$$

Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur E.

Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice II-22

Soient E un ensemble et $f \ E \to \mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E une relation binaire $\lhd$ par :

$$x \lhd y \text{ défini par } f(x) \leqslant f(y).$$

Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur E.

Si f n'est pas injective, la relation ainsi définie est-elle toujours une relation d'ordre ?

Exercice II-23

Soient A et B deux parties d'un ensemble E ordonné par $\lhd$. On suppose que A et B ont chacun un plus grand élément. Qu'en est-il de $A \cup B$ lorsque l'ordre est total ? lorsqu'il ne l'est pas ? Que dire de $A \cap B$?

Exercice II-24

Soit $(E, \blacktriangleleft)$ un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admet un plus petit élément et un plus grand élément.

1. Montrer que l'ordre est total.
2. Montrer que E est fini.

Exercice II-25

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\wp(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$X\mathcal{R}Y \text{ défini par } \Big((X = Y) \text{ ou } (\forall x \in X), (\forall y \in Y), x \leq y)\Big).$$

Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Si l'ordre $\leqslant$ est une relation d'ordre total, la relation $\mathcal{R}$ est-elle un ordre total ?

Exercice II-26

On définit sur $\mathbb{R}^2$ une relation binaire $\lhd$ par :

$$(x, y) \lhd (x', y') \text{ défini par } |x' - x| \leqslant y' - y.$$

1. Montrer que c'est une relation d'ordre.
2. On considère un couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$. Déterminer l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de ce couple.
3. Cette relation définit-elle un ordre total ?

Exercice II-27

Soient $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ deux couples ordonnée de rationnels. On dira que $z \lhd z'$ si l'on a $x < x'$ ou si $y \leqslant y'$ lorsque $x = x'$.

Montrer que cette relation est une relation d'ordre total sur l'ensemble des couples ordonnés de rationnels.

On considère de tels couples tels que chaque rationnel soit contenu dans $[0\ ;\ 1[$. Cet ensemble admet-il une borne supérieure ? un plus grand élément ? une borne inférieure ? un plus petit élément ?

Exercice II-28

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par :

$$\Big(x\mathcal{R}y\Big) \text{ défini par } \Big(x^2 - y^2 = x - y\Big) .$$

Soit $\mathcal{S}$ la relation définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par :

$$\Big(x\mathcal{S}y\Big) \text{ défini par } \Big(x^2 - y^2 \leqslant x - y\Big) .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{cl}_{\mathcal{R}}(x) = \{x, 1 - x\}$ où $\mathfrak{cl}_{\mathcal{R}}(x)$ désigne l'ensemble des éléments en relation avec x (la classe d'équivalence de x).
3. Démontrer que la relation $\mathcal{S}$ est réflexive, transitive, mais qu'elle n'est ni symétrique ni antisymétrique.
4. Soit I l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2}$. Soit $\mathcal{S}'$ la relation définie sur I par :
$$\forall (x, y) \in I^2 , \Big(x\mathcal{S}'y\Big) \text{ défini par } \Big(x^2 - y^2 \leqslant x - y\Big) .$$
Montrer que $\mathcal{S}'$ est une relation d'ordre sur I .
5. Démontrer que :
$$\Big(x\mathcal{S}'y\Big) \text{ défini par } \Big(x \leqslant y\Big) .$$

Exercice II-29

Soit f une fonction de $[0\ ;\ 1]$ dans $[0\ ;\ 1]$ croissante. On note

$$A = \{x \in [0\ ;\ 1] \,/\, f(x) \leqslant x\} .$$

1. Démontrer que A n'est pas vide.
2. Démontrer que $f(A) \subset A$.
3. Soit $a = \inf(A)$. Montrer qur $f(a)$ minore A.
4. En déduire que toute application croissante de $[0\ ;\ 1]$ dans lui-même admet un point fixe.
5. Montrer que c'est faux avec $[0\ ;\ 1[$.

II-3 Applications

II-3.1 Définition d'une application

Exercice II-30

Soit $X = \{1; 2; 3; 4\}$. Dire si chacune des relations suivantes est une application de X dans X :

1. $f = \{(2; 3); (1; 4); (2; 1); (3; 2); (4; 4)\}$.
2. $g = \{(3; 1); (4; 2); (1; 1)\}$.
3. $h = \{(2; 1); (3; 4); (1; 4); (2; 1); (4; 4)\}$.

Exercice II-31

Considérons $E = \{1; 2\}$ et $F = \{1; 2; 3\}$. Déterminer toutes les applications de E dans F, et toutes les applications de F dans E. Comparer leurs nombres.

Exercice II-32

Considérons les applications f et g définies par :

$$f = \{(1; 3); (2; 5); (3; 3); (4; 1); (5; 2)\}$$

$$g = \{(1; 4); (2; 1); (3; 1); (4; 2); (5; 3)\}.$$

1. Déterminer les images de f et de g.
2. Trouver les applications composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

II-3.2 Injectivité, surjectivité

Exercice II-33

Soient f et g les applications définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n + 1 \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases} \end{array}$$

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de ces applications.
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice II-34

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$.
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$.
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$.
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^z \end{array}$.
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \frac{1}{1+x^2} \end{array}$.
6. $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \backslash \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \longmapsto & p + \frac{1}{q} \end{array}$.

Exercice II-35

On considère E, F et G trois ensembles. Soient f, g deux applications de E dans F et de F dans G respectivement. On pose $h = g \circ f$. Montrer que :

1. si f et g sont injectives, alors h l'est aussi ;
2. si f et g sont surjectives, alors h l'est aussi ;
3. si h est une injection, alors f l'est aussi. Que peut-on dire pour g ?
4. si h est une surjection, alors g l'est aussi. Que peut-on dire pour f ?
5. si h est une surjection et g une injection, alors f est une surjection ;
6. si h est une injection et f une surjection, alors g est une injection.

Exercice II-36

Soient E, F, G et H des ensembles, et f, g et h des applications de E dans F, de F dans G et de G dans H respectivement. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des bijections, il en est de même pour f, g et h.
Indication : *on pourra utiliser les résultats du II-35.*

Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice II-37

On considère des ensembles E, F et G, et une application φ de F dans G.

On définit l'application Γ de F^E dans G^E (où F^E désigne l'ensemble des applications de E dans F) qui, à $f \in F^E$ associe $\varphi \circ f \in G^E$.

1. Montrer que Γ est injective si et seulement si φ est injective.
2. Montrer que Γ est surjective si et seulement si φ est surjective.

Exercice II-38

Soit E un ensemble et f une application de E dans E vérifiant

$$f \circ f \circ f = f.$$

Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice II-39

Soient A et B deux parties d'un ensemble E, et f l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \wp(E) & \longrightarrow & \wp(A) \times \wp(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit surjective.

Exercice II-40

Soit E un ensemble et soit f une application de E dans lui même. Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie A de E nous avons $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E.

II-3.3 Application et relation d'ordre

Exercice II-41

On munit l'ensemble des polynômes à coefficients réels de la relation binaire $\lhd$ définie comme suit. Si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_m X^m$ sont deux polynômes, alors

$$P \lhd Q \iff \left\{ \begin{array}{l} d(P) < d(Q) \text{ si } d(P) \neq d(Q) \\ (a_n, \ldots, a_0) \blacktriangleleft (b_n, \ldots, b_0) \\ \qquad\qquad \text{si } d(P) = d(Q) = n \end{array} \right.$$

en munissant l'ensemble des n-uplets l'ordre lexicographique $\blacktriangleleft$ (les polynômes sont ordonnés comme les mots dans un dictionnaire pour mots croisés : d'abord par longueur de mot, puis ensuite par l'ordre « du dictionnaire »).

On pose le degré du polynôme nul égal à $-\infty$ par convention.

1. Montrer que la relation $\lhd$ est une relation d'ordre.
2. Est-ce une relation d'ordre total ?
3. Étudier le sens de variations de l'application

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}.$$

II-3.4 Pour aller plus loin...

Exercice II-42

En utilisant le fait que si F et E sont deux ensembles, nous avons F^E qui désigne les applications de E dans F, et que son cardinal est $Card(F)^{Card(E)}$, retrouver la propriété

$$Card(\wp(E)) = 2^{Card(E)}.$$

Exercice II-43

Montrer qu'il n'existe pas d'application f surjective d'un ensemble E dans $\wp(E)$.
Indication : *on pourra raisonner par l'absurde et considérer l'ensemble $\Omega = \{x \in E / x \notin f(x)\}$.*