



Nombres complexes

année scolaire 2020-2021

III-1 Rappels

III-1.1 Manipulations trigonométriques

Exercice III-1

Résoudre l'équation

$$\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$$

Exercice III-2

Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$ puis en déduire une expression simple de

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)^8.$$

Indication : on pourra exprimer $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction respectivement de $\cos \theta$ et de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

III-1.2 Notation algébrique

Exercice III-3

Écrire sous forme algébrique $a + bi$ les nombres complexes suivants :

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1. $z_1 = (1 + i)^2$. | 5. $z_5 = \frac{1+i}{i}$. |
| 2. $z_2 = (2-3i)(2+3i)$. | 6. $z_6 = \frac{1+i}{1-i}$. |
| 3. $z_3 = (2+i)(3-5i)$. | 7. $z_7 = \frac{1}{2+i}$. |
| 4. $z_4 = (1 + i)^3$. | 8. $z_8 = \frac{2+i}{3-2i}$. |

Exercice III-4

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes de module ρ et d'argument θ définis ci-dessous :

1. $z_1 : \rho = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.
2. $z_2 : \rho = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{-\pi}{4}$.
3. $z_3 : \rho = 1$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$.
4. $z_4 : \rho = 2$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$.
5. $z_5 : \rho = 4$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
6. $z_6 : \rho = 2$ et $\theta = \pi$.

Exercice III-5

Soient deux nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.

1. Calculer $(z_1)^2$; le comparer à z_2 .
2. Calculer $(z_2)^2$; le comparer à z_1 .
3. Calculer $(z_1)^3$ et $(z_2)^3$.
4. Calculer $1 + z_2 + z_1$.

III-1.3 Module et argument

Exercice III-6

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$.
2. $z_2 = \frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}$.

Exercice III-7

Soient les nombres complexes $a = \sqrt{3} - i$, $b = 2 - 2i$ et $z = \frac{a^4}{b^3}$.

1. Donner le module et un argument de a , b , a^4 et b^3 .
2. Donner la forme algébrique de a^4 et de b^3 puis de z .
3. Calculer le module et un argument de z .
4. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice III-8

1. Écrire les nombres complexes $(1 + i)$, $(1 - i)$, $(1 + i)^5$ et $(1 - i)^3$ à l'aide de la notation exponentielle.
2. En déduire l'écriture de

$$z = \frac{(1 - i)^3}{(1 + i)^5}.$$

Exercice III-9

Déterminer les entiers naturels n tels que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

Exercice III-10

On dit qu'un entier n est somme de deux carrés s'il existe deux entiers a et b tels que $N = a^2 + b^2$.

1. Montrer que si N_1 et N_2 sont somme de deux carrés, alors $N_1 N_2$ est également somme de deux carrés.
2. Démontrer que si N est une somme de deux carrés, alors pour tout entier naturel p , N^p est également somme de deux carrés.

III-1.4 Ensemble $\mathbb{C}$

Exercice III-11

Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $(i\sqrt{3} + 1)^n$ soit un réel positif.

Exercice III-12

Pour quelles valeurs de n le nombre complexe

$$Z = \left(\frac{(i\sqrt{3} + 1)^5}{(-i + 1)^3} \right)^n$$

est-il réel positif ?

Exercice III-13

Soit un nombre complexe z quelconque. On pose

$$Z = \frac{z + 2i}{1 - iz}.$$

- Déterminer les parties réelle et imaginaire de Z .
- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- Z est réel ;
- Z est imaginaire pur.

Exercice III-14

Soit $z \neq 1$ un nombre complexe de module 1. Montrer que

$$Z = \frac{z + 1}{z - 1} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice III-15

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle f l'application qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe

$$Z = f(z) = \frac{z + i - 2}{z + 2i}$$

Déterminer la nature de :

- l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un réel.
- l'ensemble F des points M d'affixe z du plan tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.

Exercice III-16

Soient z et z' deux nombres complexes, avec $z \neq 0$. Montrer que

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff (\exists k \in \mathbb{R}^+, z' = kz).$$

Exercice III-17

Déterminer le lieu des points M dont l'affixe z vérifie :

- $\frac{|z-3|}{|z-5|} = 1$.
- $\frac{|z-3|}{|z-5|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice III-18

On considère dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z défini par :

$$\{M(z) / |(1+i)z - 2i| = 2\}.$$

Déterminer cet ensemble.

III-2 Linéarisation

Exercice III-19

- (a) Donner la formule de Moivre pour $n = 2$.
En développant $(\cos \theta + i \sin \theta)^2$, retrouver les formules d'addition usuelles $(\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$).
- (b) En déduire les expressions de $\cos^2 \theta$ et $\sin^2 \theta$ en fonction de $\cos 2\theta$.
- (a) Donner la formule de Moivre pour $n = 3$.
(b) Établir des formules analogues à celles obtenues aux questions précédentes, donnant $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.
En déduire pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ une expression de $\sin^3(\theta)$ et de $\cos^3(\theta)$.
- (a) Linéariser $2 \sin^3 x + 3 \cos^3 x$ où x est un nombre réel.
(b) Calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin^3 x + 3 \cos^3 x) dx.$$

Exercice III-20

1. Transformation de produit en somme.

On donne la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = \cos 3x \sin 4x$. Exprimer l'expression $f(x)$ à l'aide d'exponentielles. Développer le résultat et linéariser $f(x)$.

2. Linéariser $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$.

3. Linéarisation de $\cos^3 x$ à l'aide des formules d'Euler. Retrouver l'expression de $\cos^3 x$ en fonction de $\cos x$ et $\cos 3x$ figurant à l'exercice III-19

Exercice III-21

À l'aide des formules d'Euler, linéariser $\cos(x)^4$ et $\sin(x)^4$.

Exercice III-22

Linéariser $\cos(x)^3 \sin(x)^2$.

Exercice III-23

En linéarisant à l'aide des formules d'Euler, linéariser $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$, pour retrouver les formules trigonométriques usuelles.

Exercice III-24

À l'aide des formules d'Euler, linéariser :

$$\begin{aligned} &\cos(5x) \cos(3x) \\ &\cos(x) \sin(2x) \\ &\sin(3x) \sin(2x). \end{aligned}$$

Exercice III-25

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^4 \sin(t)^2 dt.$$

Exercice III-26

1. Soit a est un nombre complexe tel que $a^n = 1$ pour un certain entier naturel n , montrer que $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = 0$.
2. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

III-3 Résolutions d'équations

III-3.1 Équations

Pour résoudre une équation dans $\mathbb{C}$, parfois il faudra passer par l'écriture algébrique, mais dans d'autres cas on pourra passer par module et argument ou raisonner directement avec z . Il n'y a pas nécessairement de règle infaillible à ce sujet.

Exercice III-27

Dans $\mathbb{C}$, donner l'ensemble des solutions des équations et systèmes d'équations suivants :

$$\left. \begin{aligned} 1. z^2 &= -3 - 4i; \\ 2. z^2 &= 7 + 24i; \\ 3. z^2 + 4\bar{z} - 4 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad 4. \begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ 2i\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 0 \end{cases}.$$

III-3.2 Second degré

Exercice III-28

1. Déterminer les racines carrées de $5 - 12i$.
2. Résoudre l'équation

$$z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$$

en commençant par remarquer l'existence d'une solution imaginaire pure et on la donnera. On se ramènera ensuite à une résolution d'équation dans $\mathbb{R}$.

3. Que dire du triangle dont les sommets ont pour affixe les solution de l'équation ci-dessus ?

Exercice III-29

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^4 - (6i - 3)z^2 - 6i - 8 = 0$.
2. $z^6 + (2i - 1)z^3 - i - 1 = 0$.

Exercice III-30

Déterminer les racines quatrièmes de $-96i + 28$.

Exercice III-31

On considère $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\theta \in [0; \pi]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 + 2\lambda^2 z^2 (1 + \cos \theta) \cos \theta + \lambda^4 (1 + \cos \theta)^2 = 0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^4 z_k^n$$

où $\{z_k/k \in [1; 4]\}$ désigne l'ensemble des racines de l'équation ci-dessus.

Exercice III-32

Résoudre les équations du second degré suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 - 2iz - 1 + 2i &= 0 \\ iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Exercice III-33

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z^3 - (5i - 1)z^2 - (2i + 10)z + 8i$$

1. Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution qui est un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.
2. En déduire une factorisation de $f(z)$ comme produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré 2.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

III-3.3 Racines n^e et racines de l'unité

Exercice III-34

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^n + 1 = 0.$$

Exercice III-35

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i).$$

Exercice III-36

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\frac{z - 2i}{z + 2i} + \frac{(z - 2i)^2}{(z + 2i)^2} + \frac{(z - 2i)^3}{(z + 2i)^3} + 1 = 0$$

Exercice III-37

Résoudre l'équation

$$z^2 - \bar{z} = 0$$

Exercice III-38

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 + z^4 + 1 = 0.$$

En déduire une factorisation dans $\mathbb{R}$ de l'expression $z^8 + z^4 + 1$.

Exercice III-39

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1+z)^{2n} = (1-z)^{2n}.$$

Exercice III-40

Soient p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que ω est une racine p^{e} et q^{e} de l'unité si et seulement si $\omega = 1$.

III-4 Nombres complexes et géométrie

Exercice III-41

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points A , M et M' , avec A d'affixe 1 et M' d'affixe $1 + z^2$, soient alignés.

Indication : on traduira l'alignement de trois points par la colinéarité de deux vecteurs.

Exercice III-42

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ un nombre complexe non nul. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que les points d'affixe z , $\frac{1}{z}$ et z^2 soient alignés.

Indication : on traduira l'alignement par une égalité avec des z et des $\bar{z}$. On évitera dans un premier temps de passer par l'écriture $z = x + iy$ et on fera apparaître une équation de cercle donnée par son centre et son rayon.

Exercice III-43

Soit l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = 2iz + 2 + i$.

1. Montrer que l'équation $f(z) = z$ admet une solution unique a .
2. En déduire que la transformation géométrique qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z' = f(z))$ admet un point fixe unique A dont on donnera les coordonnées.
3. Trouver un nombre complexe λ tel que $z' - a = \lambda(z - a)$.
4. En déduire que la nature de la transformation géométrique associée à f .

Exercice III-44

On considère un quadrilatère $ABCD$ (orienté dans le sens direct). On construit sur ses arêtes les tri-

angles rectangles isocèles directs $A'BA$, $B'CB$, $C'DC$ et $D'AD$, de sommets principaux A' , B' , C' et D' .

Montrer que les segments $[A'C']$ et $[B'D']$ sont orthogonaux et de même longueur.

Exercice III-45

On considère f la similitude de centre Ω d'affixe $(2 - 3i)$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $3\sqrt{2}$.

1. Si M est un point d'affixe z , déterminer l'affixe du point M' d'affixe z' , image de M par f .
2. Déterminer l'image par f des droites d'équation $y = x + 1$ et $y = 2x - 5$.

Exercice III-46

On considère le nombre complexe $a = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. On note I , A , B , C et D les points du plan complexe d'affixes 1 , a , a^2 , a^3 et a^4 . Déterminer a^5 et montrer que

$$IA = AB = BC = CD = DI.$$

2. (a) **Démontrer** que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$ (on détaillera la justification).
(b) Montrer que $a^3 = \bar{a}^2$ et que $a^4 = \bar{a}$ et en déduire que

$$(a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0.$$

3. Résoudre l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ et en déduire, à partir de la question 2. la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.