CPES Chapitre IV

Calcul matriciel

année scolaire 2020-2021

IV-1 Opérations matricielles

IV-1.1 Opérations élémentaires

Exercice IV-1

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, transformer les matrices suivantes en matrices triangulaires supérieures (plusieurs réponses possibles).

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.
6. $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

IV-1.2 Produit matriciel

Exercice IV-2

Calculer les produits matriciels suivants :

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
3. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
4. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$
5. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}^2$$

Exercice IV-3

Utiliser la méthode du pivot de Gauss (uniquement sur les lignes) pour transformer la matrice A ci-dessous sous forme d'une matrice A' diagonale, ne comportant que des 0 et des 1 sur la diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice Q telle que [2]

$$A' = QA.$$

Exercice IV-4

On considère une matrice carrée A d'ordre n et on définit la matrice J d'ordre n par :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $\sigma(A)$ la somme des termes de la matrice A, montrer que nous avons :

$$J.A.J = \sigma(A).J$$

Exercice IV-5

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De deux manières différentes, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice IV-6

On considère l'équation l'équation $X^2 = A$ où A et X sont deux matrices carrées.

1. Montrer que si X est une telle matrice solution, nous avons les matrices A et X qui commutent.

2. L'utilisation des opérations sur les colonnes aurait entraîné une écriture de la forme : $A' = QAP$.

2. Résoudre l'équation $X^2 = A$ dans le cas où A est la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$
et X est carrée une matrice d'ordre 3.
Indication : *on pourra commencer par utiliser l'égalité $AX = XA$ pour montrer que X est de la même forme que A.*

Exercice IV-7

Soient a et b deux nombres réels non nuls. On définit la matrice A suivante :
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

IV-1.3 Matrices inversibles

Exercice IV-8

Soient A et B deux matrices qui commutent. Supposons que A est une matrice inversible. Montrer que A^{-1} et B commutent également.

Exercice IV-9

On considère la matrice A :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
et le polynôme $P = X^2 - 3X - 1$. Calculer $P(A)$ et en déduire que A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

Exercice IV-10

On considère la matrice A :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
et le polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 8X - 2$. Calculer $P(A)$ et en déduire que A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

Exercice IV-11

Pour tout nombre réel a on définit la matrice $N(a)$ par :
$$N(a) = \begin{pmatrix} a+1 & -a & -a \\ a & -a+1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tous a et b réels, montrer qu'il existe un réel c tel que $N(a)N(b) = N(c)$.
2. À quelle condition sur a a-t-on $N(a) = Id$?
3. Justifier que la matrice $N(a)$ est inversible et donner sa matrice inverse.

Exercice IV-12

Soient A et B deux matrices carrées telles que
$$AB = A + B$$
Montrer que A et B commutent.
Indication : *on admettraque* ***dans ce cas-ci****, le fait que $CD = I_n$ entraîne que C et D sont inverses l'une de l'autre et on considèrera les matrices $I_n - A$ et $I_n - B$.*

IV-2 Utilisations du calcul matriciel

IV-2.1 Résolutions de systèmes

Exercice IV-13

En appliquant la méthode du pivot, résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{array} \right.$.
2. $\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{array} \right.$.
3. $\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right.$.
4. $\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{array} \right.$.

IV-2.2 Inverses de matrices

Exercice IV-14

En utilisant la méthode du pivot, inverser les matrices suivantes si cela est possible.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice IV-15

Inverser les matrices suivantes quand cela est possible.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$.
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice IV-16

Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice IV-17

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente (c'est à dire telle que pour un certain $m \in \mathbb{N}$, A^m est la matrice nulle).

Montrer que $I_n - A$ est inversible et exprimer son inverse.

Exercice IV-18

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_n)^3$.
2. En déduire que A est inversible.

Exercice IV-19

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que E est stable pour la multiplication scalaire et l'addition matricielle.
2. Donner deux matrices de E telle que toute matrice de E s'écrive comme une combinaison linéaire de ces deux éléments.
3. Montrer que E est stable pour la multiplication matricielle et que cette dernière est commutative.
4. Déterminer les inversibles de E.
5. Déterminer les diviseurs de zéro de E.

Exercice IV-20

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe deux scalaires λ et μ tels que

$$A^2 = \lambda A + \mu Id_2.$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

Exercice IV-21

Justifier que la matrice carrée réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer A^{-1}.

IV-2.3 Calcul de suites

Exercice IV-22

On considère trois suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et $c_0 = 7$ et vérifiant les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

et l'on souhaite exprimer les suites uniquement en fonction de n.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le vecteur colonne : $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
2. On pose N la matrice définie par
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Calculer N^2, N^3 puis N^p pour tout $p \geqslant 3$.
3. Montrer que nous avons :
$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} nN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$
4. En déduite a_n, b_n et c_n en fonction de n.

IV-3 Déterminants

IV-3.1 Calculs de déterminants

Exercice IV-23

Pour chacun des déterminants ci-dessous,

— écrire le développement suivant la première ligne ;
— écrire le développement suivant la deuxième colonne ;
— calculer le déterminant en choisissant les lignes ou les colonnes de manière à rendre les calculs les plus simples possibles.

1. $A_1 = \left| \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \right|$.

2. $A_2 = \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right|$.

3. $A_3 = \left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\right|$.

4. $A_4 = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right|$.

5. $A_5 = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right|$.

Exercice IV-24

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1. $A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

Exercice IV-25

Considérons $A = (a_{i,j})_{i,j\in i,j}$ une matrice carrée d'ordre n telle que

$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + j > n + 1$$

1. Donner la forme générale de la matrice A.
2. Déterminer le déterminant de A en fonction de n et des termes de la matrice.

IV-3.2 Utilisations du déterminant

Exercice IV-26

À l'aide du déterminant, résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 6 \\ 4x - y = 9 \\ -7x + 2y + z = -15 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x + y - 5z = 26 \\ x + 2y + z = -4 \\ x + 3y + 6z = -29 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 2x + 3y - z = -15 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \\ x + 3y + 3z = 11 \\ 7x + 11y = -30 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} t - x + 3y - z = 2 \\ t + x + y - 2z = 1 \\ 2t - 2x + 2z = 2 \end{cases}$.

Exercice IV-27

Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes :

1. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$;
2. $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;
3. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
4. $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
5. $M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;
6. $M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Exercice IV-28

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n, nilpotente d'ordre q (c'est à dire que nous avons $N^q = 0_n$ et $N^{q-1} \neq 0_n$).
   (a) Montrer qua la matrice $I_n - N$ est inversible et donner son inverse.
   (b) On pose M la matrice définie par :
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Montrer que M est inversible et donner son inverse.
2. (a) Soit N une matrice carrée d'ordre n, nilpotente d'ordre 2. Pour tout entier naturel non nul p, calculer $(I_n + N)^p$.
   (b) On pose M la matrice définie par
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Calculer M^{100}.

Exercice IV-29

Reprendre les matrices des exercices IV-23 et IV-24. Lorsqu'elles sont inversibles, écrire leur inverse à l'aide de la comatrice.

Exercice IV-30

Reprendre les matrices de l'exercice IV-27. Lorsqu'elles sont inversibles, écrire leur inverse à l'aide du polynôme caractéristique.