



Structures algébriques

année scolaire 2020-2021

V-1 Lois de composition

V-1.1 Définitions de lois

Exercice V-1

On définit sur $\mathbb{R}$ l'opérateur :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \star y = \ln(e^x + e^y).$$

1. Justifier que l'opérateur $\star$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$.
2. Cette loi est-elle commutative ?
3. Cette loi possède-t-elle un élément neutre ?
4. Quels sont les éléments réguliers ?

Exercice V-2

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne $*$ associative.

Montrer qu'il existe un élément α de E tel que

$$\alpha * \alpha = \alpha.$$

Indication : on pourra considérer un élément $a \in E$ et les éléments de la forme a^{2^n} pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $a^k = a * a * \dots * a$ (k fois).

Exercice V-3

On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition $*$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1).$$

Montrer que $*$ est une loi interne sur $\mathbb{R}$ qui est commutative, non associative et possédant 1 pour élément neutre.

Exercice V-4

On munit $\mathbb{R}^+$ de la loi de composition $*$:

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x * y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Montrer que $*$ est une loi interne associative, commutative, admettant 0 pour élément neutre et qu'aucun élément x autre que 0 ne possède de symétrique.

Que se passe-t-il si l'on considère la loi définie sur $\mathbb{R}$ et non $\mathbb{R}^+$?

V-1.2 Éléments particuliers

Exercice V-5

On définit sur $E = [0 ; 1]$ la loi $\star$:

$$\forall (x, y) \in E^2, x \star y = x + y - xy.$$

1. Montrer que $\star$ est une loi de composition interne associative et commutative.

Indication : on pourra regarder $1 - (x \star y)$.

2. Déterminer l'élément neutre pour cette loi.
3. Quels sont les éléments inversibles ?
4. Quels sont les éléments réguliers ?

Exercice V-6

On considère un ensemble E et on pose X l'ensemble des applications de E dans E , que l'on munit de la loi de composition des applications.

Montrer qu'un élément f de X est régulier si et seulement si f est bijective.

Exercice V-7

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\top$ associative, d'élément neutre e , et soit $a \in E$.

Montrer que a est inversible si et seulement si

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto a \top x \end{aligned}$$

est bijective.

Exercice V-8

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative. Un élément x de E est dit *idempotent* si $x \top x = x$.

1. Montrer que si x et y commutent et sont idempotents, alors $x \top y$ aussi.
2. Montrer que si x est idempotent, alors son inverse x' l'est aussi.

V-1.3 Morphismes

Exercice V-9

On munit $\mathbb{R}$ de la loi $*$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.

V-2 Groupes

Exercice V-10

Sur $\mathbb{R}$ on définit la loi $*$ par $a * b = a + b + ab$.

1. Montrer que $*$ est une loi interne, associative, commutative.
2. Montrer que la loi $*$ possède un élément neutre que l'on déterminera.
3. Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ est un groupe abélien.
4. Résoudre l'équation $2 * 3 * x * 5 = 5 * 3$.

Consigne : on traitera cette question en utilisant les questions ci-dessus et non en revenant à la définition de la loi $*$ et en effectuant les calculs avec les $+$ et $\times$ habituels.

Exercice V-11

Montrer que l'ensemble des bijection d'un ensemble X dans lui-même, muni de la loi de composition des applications, est un groupe.

Exercice V-12

Déterminer le groupe des isométries³ du carré. Quelle est la loi considérée ? Quel est son ordre ? Est-il abélien ?

Exercice V-13

L'ensemble des bijections dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour les différentes lois constituent-ils un groupe ? Quelle est la loi considérée ?

Exercice V-14

Soit $(G, \top)$ un groupe d'élément neutre e . Montrer que si l'on a $a' \top b \top a = b'$ et $b' \top a \top b = a'$, alors $a^4 = b^4 = e$ (où $a^4 = a \top a \top a \top a$).

Indication : on pourra commencer par calculer $b \top a \top b$ et $a \top b \top a$.

Exercice V-15

Soit $(G, \cdot)$ un groupe, soient a et b deux éléments de G , et soit n un entier naturel tels que

$$(ab)^n = e.$$

Montrer qu'alors $(ba)^n = e$.

Exercice V-16

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne (notée multiplicativement) associative, qui possède un élément neutre à droite e , c'est à dire que l'on a

$$\forall g \in G, ge = g$$

et telle que tout élément g de G admette un inverse à droite g' , c'est à dire :

$$\forall g \in G, \exists g' \in G, gg' = e.$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Indication : on pourra introduire g'' , la symétrique à droite de g' pour montrer que la symétrique à droite est aussi symétrique à gauche, puis montrer que l'élément neutre à droite est aussi élément neutre à gauche.

3. On appelle *groupe des isométries d'un polygone* l'ensemble des transformations géométriques laissant globalement invariant ce polygone. Par exemple, si les sommets du polygone sont $A_1, A_2, \dots, A_n$, alors chaque sommet A_i , après la transformation, devient l'un des sommets A_j .

4. Ne pas confondre ∞ avec $+\infty$ et $-\infty$. C'est le même genre d'élément que dans le compactifié d'Alexandrov.

Exercice V-17

Soit $(G, \star)$ un groupe (d'élément neutre e) tel que pour tout x dans G , $x^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

Exercice V-18

On considère l'ensemble des fonctions homographiques $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, (avec $ad - bc \neq 0$) définies sur la droite projective (c'est à dire la droite réelle complétée⁴ par un élément ∞ tel que $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$).

Montrer que ces fonctions forment un groupe pour la composition des applications.

V-2.1 Sous-groupes

Exercice V-19

Soient A et B deux sous-groupes d'un groupe $(G, \cdot)$.

On note AB l'ensemble des produits d'un élément de A par un élément de B .

Montrer que AB est un sous-groupe si et seulement si $AB = BA$.

Exercice V-20

Soit $(G, \cdot)$ un groupe noté multiplicativement et soit A un sous-groupe de G . On appelle *normalisateur de A* le sous-ensemble noté $N(A)$ défini par :

$$\left\{ x \in G / \forall a \in A, \exists (a_d, a_g) \in A^2, \begin{cases} a \cdot x = x \cdot a_d \\ x \cdot a = a_g \cdot x \end{cases} \right\}.$$

Montrer que $N(A)$ est un sous-groupe de G .

Exercice V-21

Soit S un sous-groupe d'un groupe G noté multiplicativement et soit $a \in G$. Montrer que $a^{-1}Sa$ est un sous-groupe de G . On l'appelle sous-groupe *conjugué* de S .

Remarque. Ce résultat s'étend au cas où S n'est pas un sous-groupe mais juste un sous-ensemble non vide de G . $\circ$

Exercice V-22

Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et $H = \{a + \omega b / (a; b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.

Remarque. Si l'on pose $\omega = \sqrt{d} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on définit un groupe noté $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ qui est appelé une *extension* du groupe $(\mathbb{Z}, +)$. $\circ$

Exercice V-23

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $H = \{a^n / n \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice V-24

Soit E un ensemble et a un élément de E . On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E . Montrer que $H = \{f \in \mathfrak{S}(E) / f(a) = a\}$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(E), \circ)$.

Exercice V-25

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G, \star)$ tels que $H \cup K$ soit aussi un sous-groupe de G . Montrer que $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice V-26

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et $\star$ la loi de composition définie sur G par

$$(x_1; y_1) \star (x_2; y_2) = (x_1 x_2; x_1 y_2 + y_1).$$

1. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe non commutatif.
2. Montrer que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

V-2.2 Morphismes de groupes**Exercice V-27**

Soit $(G, \cdot)$ un groupe multiplicatif et g un élément de G . On définit l'application φ_g de G dans G par :

$$\begin{aligned} \varphi_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ_g est un automorphisme.
2. Si le groupe G est commutatif, que vaut φ_g ?

Exercice V-28

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

On définit l'ensemble $\mathcal{S} = \{M_{a,b} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)\}$ et l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M_{a,b} &\longmapsto a^2 + b^2 \end{aligned}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un groupe pour la loi usuelle de multiplication des matrices carrées.
2. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathcal{S}, \times)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice V-29

Montrer que la fonction exponentielle est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Quelle est son image ? Quel est son noyau ?

Exercice V-30

L'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \frac{z}{|z|}$ constitue-t-elle un morphisme de groupe ? Dans l'affirmative, on précisera quels groupes et on donnera son image et son noyau ?

Exercice V-31

Soient $(G, \top)$ et $(G', \perp)$ deux groupes et soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupes H de G , $f(H)$ est un sous-groupe de $(G', \perp)$.
2. Montrer que pour tout sous-groupes H' de G' , $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $(G, \top)$.

V-3 Anneaux**V-3.1 Structure d'anneaux****Exercice V-32**

Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Exercice V-33

Étant donné un anneau $(A, +, \times)$, on suppose que :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

est un morphisme surjectif.

Montrer que A est commutatif.

Indication : en posant $x = u^2$ et $y = v^2$, on pourra considérer $f(uv)$ et $f(u+v)$.

V-3.2 Éléments inversibles et réguliers**Exercice V-34**

Soit d un entier qui n'est pas un carré parfait. On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} / (a, b) \in \mathbb{Z}\}$.

- Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
- Montrer que $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
- Quels sont les éléments inversibles ? Quel est leur inverse ?
- Que se passe-t-il si d est un carré parfait ?

Exercice V-35

On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des entiers de Gauss, constitué des éléments de la forme

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib / (a, b) \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour l'addition et la multiplication des complexes.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice V-36

Soient A un anneau et $a \in A$. On suppose qu'il existe un élément et un seul b dans A tel que $ab = 1_A$.

Montrer que a est régulier à gauche, puis qu'il est inversible et que $a^{-1} = b$.

Indication : utiliser $ax = ay \Rightarrow a(x - y + b) = 1_A$, et l'unicité de b .

Exercice V-37

Soient A un anneau et a et b deux éléments de A tels que

$$ab + ba = 1_A \quad \text{et} \quad a^2 b + ba^2 = a.$$

1. Montrer que $a^2 b = ba^2$ et que $2aba = a$.

Indication : utiliser après l'avoir montré, le fait que $a^2 b + ba^2 = a(ab + ba)$ entraîne $ba^2 = aba$.

2. Montrer que a est inversible et que $a^{-1} = 2b$.

Indication : montrer et utiliser $(ab)^2 = (1 - ba)^2$.

5. cela ne signifie pas *a priori* que b est le symétrique de a , car ce n'est que la multiplication à droite qui donne 1_A .

Exercice V-38

Soient a et b deux éléments d'un anneau $(A, +, \times)$ tels que ab soit inversible et b n'est pas un diviseur de 0. Montrer que a et b sont inversibles.

V-3.3 Diviseurs de zéro et éléments nilpotents

Exercice V-39

Soit A un anneau et $a \in A$ un élément nilpotent. Montrer que $1_A - a$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice V-40

Soit A un anneau, et soient a et b deux éléments de A tels que ab soit nilpotent. Montrer que ba l'est aussi.

Exercice V-41

Montrer qu'un anneau $(A, +, \times)$ n'a pas de diviseurs de zéro si et seulement si tous ses éléments non nuls sont réguliers.

Exercice V-42

Soient x et y deux éléments d'un anneau $(A, +, \times)$.

1. Montrer que si x est nilpotent et que x et y commutent, alors xy est nilpotent.
2. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.
3. Montrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.
4. Montrer que si x est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible. Déterminer alors $(1 - x)^{-1}$.

V-4 Corps

Exercice V-43

On définit sur $\mathbb{R}$ les deux lois :

$$\begin{aligned} \forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \top b &= a + b - 1 \\ \forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \perp b &= ab - a - b + 2. \end{aligned}$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \top, \perp)$ est un corps. On précisera le symétrique d'un réel x (s'il existe) pour chacune des deux lois.

Exercice V-44

Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps et f un morphisme de corps de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{L}$. Montrer que f est injectif.

Exercice V-45

Soit $a \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. On pose

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \{x + y\sqrt{a} / (x; y) \in \mathbb{Q}^2\}.$$

1. Montrer que, pour les addition et multiplication usuelles sur $\mathbb{R}$ nous avons $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ qui est un corps.
2. Montrer que $\mathbb{Q}^2$, muni des opérations usuelles terme à terme, et $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ ne sont pas isomorphes.

Exercice V-46

Soit A un anneau commutatif fini. Montrer que A est un corps si et seulement si il ne possède pas de diviseurs de zéro.

Exercice V-47

Montrer que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ ne possède pas de sous-corps propres. Autrement dit, montrer que tout sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est égal à $\mathbb{Q}$ lui-même.

V-5 Espaces vectoriels

Exercice V-48

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et de la multiplication externe par un nombre complexe : $(a + ib) \cdot (x, y) = (a.x - b.y, a.y + b.x)$.

Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Exercice V-49

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_n \text{ bornée}\}.$
2. $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_n \text{ monotone}\}.$
3. $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_n \text{ convergente}\}.$
4. $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_n \text{ arithmétique}\}.$
5. $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_n \text{ géométrique}\}.$

Exercice V-50

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}.$
2. $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 0\}.$
3. $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}.$
4. $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 1\}.$

Exercice V-51

Les sous-ensembles de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $\{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} / f \text{ monotone}\}.$
2. $\{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} / f \text{ s'annule}\}.$
3. $\{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} / f \text{ s'annule en } 0\}.$
4. $\{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} / f \text{ impaire}\}.$