CPES Chapitre VI

Calcul intégral – Probabilités

année scolaire 2020-2021

VI-1 Calcul intégral

VI-1.1 Calculs

Exercice VI-1

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ telle que, pour toute fonction en escalier g nous avons

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice VI-2

Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ telle que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Montrer que f admet un point fixe dans $[0\ ;\ 1]$

VI-1.2 Majorations

Exercice VI-3

Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$I_n = \int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{x+n}\mathrm{d}x.$$

Indication : *on commencera par utiliser le fait que*

$$\frac{n}{x+n} = 1 - \frac{x}{x+n}.$$

Exercice VI-4

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Indication : *La fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$. On peut alors utiliser la croissance de l'intégrale pour majorer*

$$\left|\int_0^1 x^n \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x\right|$$

Exercice VI-5

Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x = f(0).$$

Indication : *on commencera par traiter le cas où $f(0) = 0$. On coupera l'intégrale en deux et l'on majorera chaque membre.*

VI-1.3 Intégrations par parties

Exercice VI-6

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^1 xe^{(3\,x)}\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \left(x^2+x\right)e^{(2\,x)}\mathrm{d}x$ (deux intégrations par parties successives).
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_1^4 \sqrt{3}\sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(2\,x+1)}{(2\,x+1)^3}\mathrm{d}x$
7. $I_7 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \left(2\,x^3+1\right)\ln(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice VI-7

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer l'intégrale

$$I(a) = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$$

au moyen d'une intégration par parties.

Exercice VI-8

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^1 x^4 e^x\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln(x)^3\,\mathrm{d}x$

VI-1.4 Changements de variables

Exercice VI-9

Montrer que pour tout entier naturel n nous avons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice VI-10

Calculer

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin(x)+1}\mathrm{d}x.$$

Indication : *on pourra effectuer le changement de variable* $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$.

Exercice VI-11

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer l'intégrale

$$I(a) = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$$

au moyen du changement de variables $x = \frac{1}{t}$.

VI-1.5 Intégrales généralisées

Exercice VI-12

Pour chacune des intégrale ci-dessous, dire si elle diverge ou converge, et dans ce dernier cas, la calculer.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln(x)^2}\mathrm{d}x$
7. $I_7 = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

Exercice VI-13

Soit f une fonction réelle définie et décroissante sur $]0\ ;\ 1]$, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Montrer l'existence et déterminer la valeur de

$$\lim_{\substack{x>0 \\ x\to 0}} x f(x)$$

Exercice VI-14

1. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}.$$
2. Calculer l'intégrale :
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$
Indication : *on effectuera le changement de variable* $t = \sqrt{1+x^2}$ *puis on remarquera que nous avons* $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-1}$.

VI-2 Notion de probabilités

VI-2.1 Rappels de dénombrement

Exercice VI-15

Lors d'une tombola, 300 billets sont vendus. Au total, quatre billets sont gagnants. Si l'on achète dix billets, quelle est la probabilité P_g d'avoir au moins un lot ?

Exercice VI-16

Une personne décide de classer 20 dossiers en utilisant le hasard.

1. Combien de classements sont-ils possibles sans recourir à des *ex-aequo* ?
2. Combien de classements sont-ils possibles avec exactement deux *ex-aequo* ?

VI-3 Variable aléatoire

VI-3.1 Densité de probabilité

Exercice VI-17

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilités :

1. la fonction f_1 définie par :
$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 4\,te^{(-2\,t)} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$
2. la fonction f_2 définie par :
$$f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \frac{3}{2}\left(e^{\left(-\frac{1}{2}\,t\right)}-1\right)^2 e^{\left(-\frac{1}{2}\,t\right)} & \\ & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

3. la fonction f_3 définie par :

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{e^{(-t)}\ln\left(e^t+1\right)}{2\ln(2)} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

Indication : *pour la fonction f_3 on pourra penser au changement de variables $u = \mathrm{e}^{-t}$. On calculera également la dérivée de $x \mapsto x\ln(x) - x$.*

Exercice VI-18

On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]1 \ ; \ 2] \\ \frac{a}{\sqrt{t-1}} & \text{si } t \in]1 \ ; \ 2] \end{cases} \end{array}$$

Déterminer a pour que la fonction f soit une densité de probabilité.

Exercice VI-19

Pour tout un entier naturel non nul n, on définit la fonction

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n^2 x \exp\left(-\frac{n^2x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f_n est une densité de probabilité d'une variable aléatoire.

Exercice VI-20

On considère une variable aléatoire X dont la densité est donnée par la fonction f :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c.\mathrm{e}^{-|x|} \end{array}$$

Déterminer la valeur de c.

VI-3.2 Fonctions de répartition

Exercice VI-21

On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi de Gumbel* si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x-\mathrm{e}^{-x}} \end{array}.$$

Vérifier que f est une densité et déterminer la fonction de répartition.

Indication : *faire apparaître une fonction de la forme $u'\varphi'[u]$.*

Exercice VI-22

Reprendre les fonctions de l'exercice VI-17. Pour chacune d'elle, s'il s'agit d'une densité de probabilité, exprimer la fonction de répartition associée.

Exercice VI-23

Soit f la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \end{array}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Indication : *on remarquera que f s'écrit sous la forme $-\frac{u'}{u^2}$.*
2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X admettant f pour densité.

Exercice VI-24

On considère la fonction F définie par :

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1-\sqrt{-x}}{2} & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{1+\sqrt{x}}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases} \end{array}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité dont on donnera la fonction de densité.

VI-3.3 Conditionnement

Exercice VI-25

On considère un jeu de 52 cartes, et les événements suivants :

C : la carte tirée est un cœur.

T : la carte tirée est un trèfle.

R : la carte tirée est rouge.

D : la carte tirée est une dame.

F : la carte tirée est une figure.

1. Déterminer les probabilités $P_C(D)$, $P_R(C)$, $P(F \cap T)$ et $P(D \cup C)$.
2. Quelle est la probabilité que la carte tirée soit une figure rouge ?
3. Sachant que la carte tirée est une dame, quelle est la probabilité que ce soit un trèfle ?

Exercice VI-26

Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard.

1. Quelle est la probabilité de l'événement « *tirer un roi ou un pique* » ?
2. Les événements A : « *tirer un roi* » et B : « *tirer un pique* » sont-ils indépendants ?
3. On perd le roi de cœur. Les événements A et B sont-ils toujours indépendants ?
4. Après avoir bien cherché, on retrouve la carte du roi de cœur mais c'est l'as de cœur qui est perdu à son tour. Que dire de l'indépendance des deux événements ?

Exercice VI-27

Dans une réunion, 60 % des personnes sont des femmes, une femme sur trois et un homme sur deux portent des lunettes. Quelle est la probabilité pour qu'une personne portant des lunettes prise au hasard soit une femme ?

Exercice VI-28

Une personne oublie régulièrement ses clefs. Pour tout entier naturel n on définit :

E_n **:** « *la personne oublie ses clefs le jour* n ».
P_n **:** la probabilité $P(E_n)$.
Q_n **:** la probabilité $P(\overline{E_n})$.

On suppose que $P_1 = a$ est donné et que, si le jour n il oublie ses clefs, le jour suivant il les oublie avec la probabilité de $\frac{1}{10}$, et s'il n'oublie pas ses clefs le jour n, il les oublie le lendemain avec la probabilité de $\frac{4}{10}$.

1. Montrer que nous avons
$$P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n.$$
En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n.
2. Quelle est la probabilité de l'événement « la personne a oublié ses clefs le jour n » ?
Indication : *on montrera que la suite* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers un réel* l *et on montrera que* $(P_n - l)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite géométrique.*

VI-3.4 Espérance mathématique

Exercice VI-29

On considère $a \in \mathbb{R}$ et la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} a.3^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a.3^{x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit une densité de probabilité.
Rappel : *nous avons* $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$.
2. Soit X admettant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et la déterminer.
Indication : *on admet que la fonction* $x \mapsto x.f(x)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$.

Exercice VI-30

On considère X une variable aléatoire de densité :

$$\begin{array}{rccl} f_X : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases} \end{array}$$

1. Admet-elle une espérance mathématique ? Si oui, la calculer.
2. Admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

VI-4 Lois usuelles

Exercice VI-31

Une entreprise décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements. Pour cela elle décide d'affranchir au hasard les trois cinquièmes de ses lettres au tarif urgent et le reste au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées. Quelle est la probabilité des événements :
A : « *au moins l'une des personnes reçoit une lettre affranchie au tarif urgent* ».
B : « *exactement deux personnes reçoivent une lettre affranchie au tarif urgent* ».
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi un lot de dix lettres. Quelle est la loi de probabilité de X ? Quelle est l'espérance mathématique de X ? Quelle est la variance de X ?

Exercice VI-32

Un avion peut accueillir 20 personnes. Une étude statistique montre que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : « *nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20* ».

Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exercice VI-33

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(P(X = k))_{k\in\mathbb{N}}$ soit décroissante.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, à partir de quelle valeur de k la suite $(P(X = k))_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle décroissante ?

Exercice VI-34

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $p \in \,]0\,;\,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = n) = pP(X \geqslant n).$$

Déterminer la loi de X.
Indication : *on calculera* $P(X = 1)$ *puis* $P(X = 2)$ *et ainsi de suite de proche en proche par récurrence.*

Exercice VI-35

Une étude statistique a montré que la durée de vie en année d'un disque dur était une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle. L'étude a également montré que la durée de vie moyenne était de 5 ans.

1. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle suivie par X.
2. Le disque dur est garanti 2 ans. Quelle proportion (exacte puis à 10^{-3} près) de disques durs sera retournée au fournisseur pour cause de panne ?
3. Calculer $P(X \geqslant 3)$. Interpréter ce résutat.
4. Sachant qu'un disque dur n'est plus sous garantie, quelle est la probabilité, à 10^{-2} près, que sa durée de vie dépasse 5 ans ?