Polynômes – fractions rationnelles

année scolaire 2020-2021

VII-1 Polynômes sur un corps $\mathbb{K}$

VII-1.1 Ensemble des polynômes

Exercice VII-1

Soient $P_1 = X^2+1$, $P_2 = X^2+X-1$ et $P_3 = X^2+X$ trois polynômes. Montrer que tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire des éléments de la famille $\{P_1; P_2; P_3\}$.

Exercice VII-2

Pour tout entier naturel k entre 0 et n, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Montrer que la famille $\{P_k / k \in [\![0\ ;\ n]\!]\}$ permet d'écrire de manière unique tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice VII-3

Pour tout entier naturel k entre 0 et n, on pose $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de la famille $\{P_k / k \in [\![0\ ;\ n]\!]\}$.

Exercice VII-4

Soit n un entier naturel, et soit $A \in \mathbb{K}_n[X]$ un polynôme non nul.

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] / A|P\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice VII-5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit Δ l'application définie par :

$$\Delta\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}.$$

1. Montrer que Δ est bien définie et que c'est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de Δ.
   Indication : *si $deg(P) = m$ alors P possède au plus m racines.*

Exercice VII-6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit φ l'application définie par :

$$\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (n+1)P - XP' \end{array}.$$

1. Montrer que φ est bien définie et que c'est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de φ.

VII-1.2 Anneau des polynômes

Exercice VII-7

Soient a et b deux réels, et considérons le polynôme

$$P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$$

Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice VII-8

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation :

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

Exercice VII-9

Résoudre les équations suivantes :

1. $Q^2 = XP^2$, d'inconnues P et Q dans $\mathbb{K}[X]$.
2. $P \circ P = P$, d'inconnue P dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice VII-10

Résoudre les équations suivantes :

1. $P'^2 = 4P$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice VII-11

Résoudre l'équation $P = P'P''$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice VII-12

Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$.

Exprimer les coefficients de P_n à l'aide de nombres factoriels.

VII-2 Arithmétique des polynômes

VII-2.1 Division euclidienne

Exercice VII-13

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. $X^3 - 2X + 1$ par $X^2 + 2X + 1$.
2. $X^5 + 5X^4 - X^3 + 7X^2 + 3X$ par $X^2 + 1$.
3. $X^5 + 6X^3 + 2X^2 + 10X + 1$ par $X^3 + 5X + 2$.
4. $X^4 + 5X^3 + 7X^2 + 4X - 2$ par $X^2 + 3X - 1$.

Exercice VII-14

Montrer les divisibilités des polynômes ci-dessous, et en déterminer les quotients :

1. $X-1|X^3-2X^2+3X-2$.
2. $X-2|X^3-3X^2+3X-2$.
3. $X+1|X^3+3X^2-2$.

Exercice VII-15

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, on considère A un polynôme non nul, et soit r l'application définie par :

$$r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & R \end{array}$$

où R est le reste de la division euclidienne de P par A.

1. Montrer que r est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer [6] que $r \circ r = r$.
3. Déterminer le noyau et l'image de r.

Exercice VII-16

Soit A un polynôme non nul sur $\mathbb{R}[X]$, et soit q l'application définie par :

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & Q \end{array}$$

où Q est le quotient de la division euclidienne de P par A.

1. Montrer que q est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer le noyau et l'image de q.

Exercice VII-17

Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et de $P'(a)$.

Exercice VII-18

Soient a et b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et de $P(b)$.

Exercice VII-19

Montrer que le reste de la division euclidienne de X^k par X^n-1 est X^r, où r est le reste de la division euclidienne de k par n.

Exercice VII-20

Soient A, B et P des polynômes non nuls. Montrer que si $B \circ P$ divise $A \circ P$, alors B divise A.

VII-2.2 Divisibilité

Exercice VII-21

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $X^2+X+1|X^{2n}+X^n+1$.

Exercice VII-22

Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, $P-X$ divise $P \circ P - P$ et en déduire qu'il divise $P \circ P - X$.

Exercice VII-23

Soient p et q deux entiers supérieurs à 2 et premiers entre eux. Montrer que :

$$(X^p-1)(X^q-1) \mid (X-1)(X^{pq}-1).$$

Indication : *on pourra montrer que pour tous éléments a et b et pour tout entier k, nous avons $a-b$ qui divise a^k-b^k.*

Exercice VII-24

Déterminer dans $\mathbb{K}[X]$ tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

VII-2.3 PGCD

Exercice VII-25

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ non nuls. Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si $A+B$ et AB le sont.

Exercice VII-26

Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $\mathrm{PGCD}((A^2+B^2),(AB)) = (\mathrm{PGCD}(A,B))^2$.

Indication : *on pourra commencer par traiter le cas où A et B sont premiers entre eux.*

Exercice VII-27

Soient n et m deux entiers naturels.

1. De la division euclidienne de n par m, déduire celle de X^n-1 par X^m-1.
2. Établir que
$$pgcd(X^n-1, X^m-1) = X^{pgcd(n,m)}-1.$$

Exercice VII-28

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $A^2|B^2$. Montrer que $A|B$.

VII-3 Factorisation

VII-3.1 Racines

Exercice VII-29

Déterminer tous les polynômes P vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^2.$$

Exercice VII-30

Déterminer tous les polynômes P vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^2 + (-1)^n.$$

Exercice VII-31

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(X^2)+P(X)P(X+1)=0$.

1. Montrer que si a est racine de P alors a^2 l'est

6. On dit que r est un *projecteur*.

aussi.

2. En déduire que $a = 0$ ou bien a est racine de l'unité.

Initialement, cet exercice proposait de déterminer exactement un tel polynôme. La méthode utilisée est un peu fort en marge du programme et a donc été omise.

Exercice VII-32

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = a'X^2 + b'X + c'$ aient une racine commune (on suppose $aa' \neq 0$).

Indication : *on pourra poser α et β les racines de Q et calculer $P(\alpha)P(\beta)$.*

Exercice VII-33

1. Soit
$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$
un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$. Supposons que $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ est une racine de P (avec $\frac{p}{q}$ irréductible). Montrer que nous avons alors :
$$p|a_0, \qquad q|a_n.$$
2. En déduire que si k est un entier et si a n'est pas la puissance k^e d'un entier, alors $\sqrt[k]{a}$ est irrationnel.
3. **Application :** déterminer parmi quelles valeurs chercher les racines rationnelles du polynôme
$$P = 30X^3 - 61X^2 + 31X - 4$$

VII-3.2 Multiplicité d'une racine

Exercice VII-34

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré supérieur à 2. Montrer que P' est scindé.

Indication : *on précise le* théorème de Rolle suivant :

Théorème VII-3.1 *Soit f une fonction continue dérivable sur un intervalle $[a~;~b]$. Si nous avons $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe $c \in]a~;~b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

VII-3.3 Polynômes irréductibles

Exercice VII-35

Écrire sous forme de facteurs irréductibles les polynômes suivants, dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

1. $P = X^4 + X^2 + 1$.
2. $P = X^3 + X^2 + X + 1$.

VII-4 Liens entre coefficients et racines

Exercice VII-36

On considère le polynôme
$$P = X^4 - 3X^3 - 12X^2 + 48X - 64.$$
Déterminer les racines de P sachant qu'il possède deux racines opposées.

Exercice VII-37

Résoudre, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} &= 1 \end{cases}$$

Indication : *on essaiera de trouver un polynôme dont les racines satisfont aux conditions.*

Exercice VII-38

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système :
$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ xyz &= 2. \end{cases}$$

Exercice VII-39

Soient a et b deux réels. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des réels u, v et w tels que $u+v+w = 3a$ et $uv+vw+wu = 3b$. Calculer alors le maximum de uvw.

Indication : *on essaiera de trouver un polynôme dont les racines satisfont aux conditions.*

VII-5 Fractions rationnelles

VII-5.1 Corps des fractions rationnelles

Exercice VII-40

Déterminer un supplémentaire[7] de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice VII-41

Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

7. Un supplémentaire de F dans E est un sous-espace vectoriel G de E tel que tout élément de E s'écrive de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

VII-5.2 Dérivabilité

Exercice VII-42

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que si $\deg F' < \deg F - 1$, alors $\deg F = 0$.

VII-5.3 Zéros et pôles

Exercice VII-43

Soit Q une fraction rationnelle pouvant s'écrire sous la forme
$$Q(X) = \frac{P'(X)}{P(X)}.$$
Montrer que nous avons
$$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - \alpha_i}$$
où les α_i représentent les racines du polynôme scindé P (comptées avec leur ordre de multiplicité).

Remarque : *nous supposons que P est scindé, cela permettant des calculs dans $\mathbb{R}$ sans difficultés. Il faut savoir que ce résultat peut quand même, sous certaines conditions, s'étendre à P scindé dans $\mathbb{C}$ (ce qui est toujours le cas, rappelons-le).*

Exercice VII-44

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

1. Soit a un zéro d'ordre $\alpha \geqslant 1$ de F. Montrer que a est zéro d'ordre $\alpha - 1$ de F'.
2. Comparer les pôles de F et de F', ainsi que leur ordre de multiplicité.

Exercice VII-45

Soient p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Déterminer les zéros et les pôles de $F = \frac{X^p - 1}{X^q - 1}$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ en précisant les multiplicités respectives.

VII-6 Décomposition en éléments simples

VII-6.1 Pratique de décomposition

Exercice VII-46

En utilisant une division puissances croissantes, décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$:
$$F = \frac{X^3 + 5X^2 + 3X + 2}{(X-1)^4 (X^2+1)}$$

Exercice VII-47

Avec le choix de la méthode, décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F_1 = \frac{1}{X^4+1}$.
2. $F_2 = \frac{1}{X^4-1}$.
3. $F_3 = \frac{X^3}{X^2+X+1}$.
4. $F_4 = \frac{1}{X^8-1}$

VII-6.2 Utilisation de la décomposition

Exercice VII-48

Exprimer la dérivée d'ordre n de $\frac{1}{X(X^2+1)}$.

Exercice VII-49

Soit la fraction $F = \frac{1}{X(X+1)}$.

1. Réaliser la décomposition en éléments simples de F.
2. En déduire une simplification pour $n \geqslant 1$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice VII-50

Soit la fraction $F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

1. Réaliser la décomposition en éléments simples de F.
2. En déduire une simplification pour $n \geqslant 1$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice VII-51

Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(4-x^2)^2}$.

Exercice VII-52

Trouver a fraction rationnelle F telle que
$$F(X+1) - F(X) = \frac{X+3}{X(X-1)(X+1)}$$

Exercice VII-53

Calculer les intégrales suivantes[8] :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$.
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(2\,x+1)(x+1)^2}\mathrm{d}x$.
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x+2)(x+1)}\mathrm{d}x$.
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+3\,x+2}\mathrm{d}x$.

8. On admet qu'une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$ est $\arctan(x)$, réciproque de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$.