CPES Chapitre VIII

Espaces vectoriels et applications linéaires

année scolaire 2020-2021

VIII-1 Supplémentarité

Exercice VIII-1

On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions réelles. On admet qu'il s'agit d'un espace vectoriel réel. Soit $F = \{f \in E / f(0) + f(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un s.e.v. de E.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice VIII-2

On pose $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^1$. On admet qu'il s'agit d'un espace vectoriel réel.

On considère les deux ensembles F et G suivants

$$F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$$
$$G = \left\{x \mapsto ax + b / (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice VIII-3

On considère un corps $\mathbb{K}$ et $\overrightarrow{u} = (1; 1; \ldots; 1)$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$. On admet que $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel. Montrer que $K = Vect(\overrightarrow{u})$ et

$$H = \left\{(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in \mathbb{K}^n \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$$

sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

VIII-2 Familles de vecteurs

Exercice VIII-4

Pour $i \in [\![0\ ;\ 4]\!]$ on considère les fonctions $f_i : [0\ ;\ 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ définies par :

$$f_1(x) = \cos x \qquad f_2(x) = x\cos x$$
$$f_3(x) = \sin x \qquad f_4(x) = x\sin x.$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice VIII-5

On considère un entier n non nul. Pour tout entier $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$, on pose la fonction f_k définie par :

$$f_k \ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{kx} \end{array}$$

Montrer que la famille $(f_k)_{k \in [\![0\ ;\ n]\!]}$ est libre.

Exercice VIII-6

On considère trois réels distincts (modulo 2π) a, b et c. Les fonctions

$$f_1 : x \mapsto \sin(a + x)$$
$$f_2 : x \mapsto \sin(b + x)$$
$$f_3 : x \mapsto \sin(c + x)$$

sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice VIII-7

On définit les sous-ensembles F et G de $\mathbb{R}^3$ par :

$$F = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$$G = \left\{\begin{pmatrix}2\alpha\\ \alpha+\beta\\ 2\beta\end{pmatrix} \Big/ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Justifier que ce sont des sous-espaces vectoriels et montrer que nous avons $F = G$

Exercice VIII-8

On considère $E = \mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Soit $\mathcal{F} = \{P_0, P_1, ...P_k\}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ une famille de polynômes vérifiant $deg(P_i) = i$.
   Montrer que la famille est libre.
3. Soit $\mathcal{G} = \{Q_0, Q_1, ...Q_k\}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ une famille de polynômes vérifiant $Val(Q_i) = i$.
   Montrer que la famille est libre.

Exercice VIII-9

Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille libre de vecteurs de E et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. On pose $u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ et pour tout i : $y_i = x_i + u$. À quelle condition sur les α_i, la famille $(y_1, ..., y_n)$ est-elle libre ?

Exercice VIII-10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1,...,u_n,u_{n+1})$ une famille de vecteurs de E. Montrer que :

1. Si $(u_1,...,u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin Vect(u_1,...,u_n)$ alors $(u_1,...,u_n,u_{n+1})$ est libre.
2. Si $(u_1,...,u_n,u_{n+1})$ est génératrice et $u_{n+1} \in Vect(u_1,...,u_n)$ alors $(u_1,...,u_n)$ est génératrice.

Exercice VIII-11

Soit $(e_1,...,e_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que pour tout $a \in E \backslash Vect(e_1,...,e_p)$, la famille $(e_1+a,...,e_p+a)$ est libre.

VIII-3 Dimension finie

Exercice VIII-12

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On définit F et G les sous-ensembles définis par :

$$F = \{(x,y,z) \in E / 2x + y - z = 0\}$$

$$G = \text{Vect}\{(1,1,1),(2,1,2)\}$$

1. Justifier que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer les dimensions des sous-espaces F et G ainsi qu'une base de chacun d'eux.
3. Déterminer une « équation » de G, c'est à dire une relation entre les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) de G, de la même manière que pour la définition de F.
4. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F \cap G$ et $F+G$.

Exercice VIII-13

Soit E l'ensemble des fonctions réelles telles qu'il existe a ,b et c pour lesquels : $f(x) = (ax^2+bx+c)\cos x$.

1. Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice VIII-14

Justifier que $\left(X^2+1; X+1; 1\right)$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 dans $\mathbb{R}$, et décomposer $3X^2+2X+1$ dans cette base.

Exercice VIII-15

Justifier que

$$E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$$

est un $\mathbb{R}$-e.v. et en donner une base.

Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice VIII-16

On considère

$$F = \{(x; y-x; z; y) / (x;y;z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$

Exercice VIII-17

Soit p un entier naturel non nul et E l'ensemble des suites réelles p-périodiques (i.e. l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ telles que pour tout n, $u_{n+p} = u_n$).

Montrer que E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci.

Exercice VIII-18

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.

VIII-4 Applications linéaires

VIII-4.1 Définitions

Exercice VIII-19

Les applications entres espaces vectoriels suivantes sont-elles des applications linéaires ?

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y;z) & \longmapsto & x+y+2z \end{array}.$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x+y+1 \end{array}.$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & xy \end{array}.$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y;z) & \longmapsto & x-z \end{array}.$

Exercice VIII-20

Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & (x+y; x-y) \end{array}.$$

Montrer que f est un automorphisme[9] et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice VIII-21

Soit l'application

$$I : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0\ ;\ 1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array}.$$

Montrer que I est une forme linéaire.

9. Un automorphisme est une application linéaire bijective d'un espace dans lui même.

Exercice VIII-22

Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F. Montrer que pour toute partie A de E, on a $f(VectA) = Vectf(A)$.

VIII-4.2 Noyaux et images

Exercice VIII-23

Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' - 3f' + 2f. \end{array}$$

Montrer que φ est un endomorphisme, et préciser son noyau.

Exercice VIII-24

Soit a un élément d'un ensemble non vide X et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On définit l'application φ_a par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_a : E^X & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

1. Montrer que φ_a est une application linéaire.
2. Déterminer l'image et le noyau de φ_a.

Exercice VIII-25

On considère E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et les deux applications φ et ψ définies par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \psi : E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) \end{array}.$$

1. Montrer que φ et ψ sont deux endomorphismes de E.
2. Exprimer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
3. Déterminer les images et noyaux de φ et de ψ.

Exercice VIII-26

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que

$$f^2 - 3f + 2Id = 0.$$

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Établir que $Ker\ (f - Id)$ et $Ker\ (f - 2Id)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice VIII-27

Soient u et v deux formes linéaires non nulles sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que u et v ont le même noyau si et seulement si il existe un scalaire α tel que $u = \alpha v$.

Exercice VIII-28

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que : $f(A) \subset f(B) \iff A + ker(f) \subset B + ker(f)$.

Exercice VIII-29

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère les endomorphismes $D : f \mapsto f'$ et P qui, à $f \in E$ associe sa primitive nulle en 0.

Déterminer les noyaux, les images et les sous-espaces invariants par D, P, $D \circ P$ et $P \circ D$.

Exercice VIII-30

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

1. $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ f^2 \iff \mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ f = \{0_E\}$.
2. $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^2 \iff \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Ker}\ f = E$.
3. Que se passe-t-il si f est un projecteur ? (c'est à dire si f vérifie $f \circ f = f$).

Remarque : *Dans chacune des équivalences ci-dessus, l'une des implications est toujours vraie (laquelle ?).*

VIII-4.3 Projecteurs

Exercice VIII-31

Soient p et q des projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que, dans ce cas, $\mathrm{Im}\ (p+q) = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Im}\ q$ et $\mathrm{Ker}\ (p+q) = \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q$.

Exercice VIII-32

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur.

Montrer que u et p commutent si et seulement si le noyau et l'image de p sont stables par u.

VIII-4.4 Applications linéaires en dimensions finies

Exercice VIII-33

Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1,0,0) = (0,1)$$
$$f(1,1,0) = (1,0)$$
$$f(1,1,1) = (1,1).$$

Exprimer $f(x,y,z)$ puis déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice VIII-34

Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie n. On considère une application linéaire f de E dans E telle que $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer qu'il existe un vecteur a de E tel que

$$\{a; f(a); f^2(a); \ldots; f^{n-1}(a)\}$$

soit une base de E.

Exercice VIII-35

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Montrer qu'il existe un vecteur u et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ tels que $f(x) = \varphi(x)u$.

VIII-4.5 Théorème du rang

Exercice VIII-36

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$E = \ker f + \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2.$$

Remarque : *ce résultat peut être vu en dimension quelconque (voir exercice VIII-30) mais dans le cas de la dimension finie, nous avons des méthodes plus spécifiques pour le justifier.*

Exercice VIII-37

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f)$.

1. Comparer $\operatorname{Im} f^2$ avec $\operatorname{Im} f$ et $\ker f^2$ avec $\ker f$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.

VIII-5 Matrices et applications linéaires

VIII-5.1 Matice d'une application

Exercice VIII-38

On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, \cdots X^n\}$. Pour chacune des applications ci-dessous, justifier qu'elles sont linéaires et préciser l'ensemble d'arrivée et leurs matrices.

$$\varphi : P \longmapsto P(1)$$

$$\psi : P \longmapsto \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t.$$

$$\zeta : P \longmapsto \int_0^X P(t)\mathrm{d}t$$

(pour la dernière application, on identifie l'espace des polynômes avec celui des fonctions polynomiales).

Exercice VIII-39

On considère $E = \mathbb{K}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{K}^n$ que l'on munit de leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B} = \{1, X, \cdots X^{p-1}\}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{i \in [\![1\ ;\ n]\!]}$.

On pose $(a_1, a_2 \cdots, a_n)$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$.

Déterminer la matrice de l'application

$$f : P \longmapsto (P(a_1), \cdots, P(a_n)).$$

Exercice VIII-40

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ défini par

$$\begin{array}{cccc} D : & \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ & P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$$

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Après avoir montré que la famille $\mathcal{B}' = \{X + 1; X - 2; X^2 + X; X^3 + X^2 - X\}$ constitue une base, déterminer la matrice de D dans cette base au départ et la base canonique à l'arrivée.

Exercice VIII-41

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}_4[X]$ défini par :

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{C}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_4[X] \\ & P(X) & \longmapsto & P(1-X) \end{array}$$

et soit A sa matrice dans la base canonique.

Former la matrice A^{-1}.

Exercice VIII-42

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice VIII-43

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A. On pose $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, -1, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 0, 1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Déterminer une base de $\ker f$ et de $\operatorname{Im} f$.

Exercice VIII-44

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ par : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\mathcal{C} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ avec $\epsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\epsilon_2 = (-1, 1, 0)$ et $\epsilon_3 = (1, 1, 1)$ (exprimés dans la base canonique). Montrer que $\mathcal{C}$ est une base.
2. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
3. Calculer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n)$ pour tout n.

Exercice VIII-45

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (i, j, k)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et de $\ker f$.
3. Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la supplémentarité de $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$?

VIII-5.2 Matices de passage

Exercice VIII-46

Reprendre l'exercice VIII-44 en utilisant les matrices de changement de bases pour déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.