



Étude locale de fonctions

année scolaire 2020-2021

IX-1 Rappels

IX-1.1 Limites

Exercice IX-1

Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ si et seulement si elle est constante.

Exercice IX-2

Déterminer les limites des expressions ci-dessous :

1. $f_1(x) = -3x^2 + 4x + 1$ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. $f_2(t) = \frac{(6t-2)(t+1)}{(t-\frac{1}{3})(t+2)}$ en $\frac{1}{3}$ par valeurs supérieures et en $+\infty$.
3. $f_3(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Remarque : lors du calcul de certaines formes indéterminées (comme par exemple dans le cas de polynômes), dans la mesure du possible on ne se contentera pas d'appliquer le résultat mais on transformera l'expression de manière à lever l'indétermination.

Exercice IX-3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$ par

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-6x+8}.$$

Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction ?

Exercice IX-4

Soit h la fonction numérique définie par

$$h(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une branche infinie dont on précisera la nature.

2. (a) Démontrer que le quotient $q(x) = \frac{h(x)}{x}$ admet une limite finie a quand x tend vers $+\infty$.

- (b) Le réel a étant ainsi fixé, démontrer que la différence $d(x) = h(x) - ax$ admet une limite finie b quand x tend vers $+\infty$.

En déduire que la droite D_1 d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice IX-5

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 1}.$$

1. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ dont on donnera une équation.
2. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
3. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une autre asymptote ? Si oui, en donner une équation.

Exercice IX-6

Étudier les limites en 0 , $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$ où $E(x)$ désigne la partie entière.

IX-1.2 Variations

Exercice IX-7

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que la fonction f est strictement décroissante.

IX-2 Continuité et continuité uniforme

Exercice IX-8

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et soit x_0 un réel de I qui ne soit pas une borne.

Montrer que si $f(x_0) \neq 0$, il existe $\eta > 0$ tel que sur $]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$ la fonction f ne s'annule pas.

Remarque : ce résultat reste vrai si l'on suppose uniquement f continue en x_0 .

Exercice IX-9

Soit f une fonction réelle dérivable et soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un intervalle I centré en a tel que $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in I$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde en

supposant qu'un tel x dépend et en considérant le taux de variations.

2. On suppose que f' est continue en a . Montrer qu'il existe un intervalle I centré en a tel que f soit injective sur I .

Exercice IX-10

Les deux fonctions suivantes ne sont pas définies en 0. Sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

1. $f_1(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. $f_2(x) = \cos(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice IX-11

Étudier la continuité de la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 E\left(\frac{1}{x}\right).$$

Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Exercice IX-12

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $|f|$ admet une limite en $+\infty$. Montrer que f admet également une limite en $+\infty$.

Ce résultat reste-t-il vrai si l'on ne suppose plus la continuité de f ?

Exercice IX-13

Soit f une fonction réelle croissante et définie sur

$\mathbb{R}_+^*$ telle que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que la fonction f est continue.

Indication : on donne le résultat suivant (qui est une variante continue du théorème de limite des suites monotones bornées) : si φ est une fonction monotone définie sur un intervalle I et si $a \in I$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} \varphi(x)$ existent.

Exercice IX-14

Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue.

Indication : on pourra montrer que nous avons $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

Exercice IX-15

Soit f une application uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$|f(x)| \leq ax + b \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+).$$

Indication : on pourra majorer $|f(0) - f(x)|$.

Exercice IX-16

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle $[0 ; +\infty[$. On suppose que f admet une limite réelle finie l en $+\infty$.

Montrer que la fonction f est uniformément continue sur $[a ; +\infty[$.

Indication : considérer la fonction $F = f - l$ et majorer $|F(x) - F(y)|$ en distinguant plusieurs cas.

IX-3 Fonctions lipschitziennes

Exercice IX-17

On rappelle¹⁰ que nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Montrer que la fonction sinus est 1-lipschitzienne.

Exercice IX-18

Soit f une fonction k -lipschitzienne avec $k \in [0 ; 1[$

définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = 0$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers une valeur que l'on déterminera.

IX-4 Calcul différentiel

IX-4.1 Dérivées et primitives

Exercice IX-19

On considère la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que la fonction f est continue en 0. Est-elle dérivable en 0 ?

Exercice IX-20

On définit les fonction arcsin, arccos et arctan comme étant les fonctions réciproques des fonctions sinus, cosinus et tangente sur les intervalles $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$,

$[0 ; \pi]$ et $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ respectivement.

1. Justifier que ces trois fonctions sont dérivables et en déterminer les dérivées.

2. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I donné :

(a) f_1 définie sur $[-1 ; 1]$ par $f_1(x) = x \arccos(x)$.

(b) f_2 définie sur $[-1 ; 1]$ par $f_2(x) = x \arcsin(x)$.

(c) f_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x) = \arctan(2x)$.

Exercice IX-21

Soit f une fonction dérivable à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) sur un intervalle I .

10. Ce peut être un petit exercice intéressant à refaire à ses heures perdues...

1. Calculer la dérivée n^e de la fonction

$$g_n : x \mapsto x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur n . Le n de la fonction et celui de l'ordre de dérivation sont le même.

2. Exemples avec la fonction $x \mapsto x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ et la fonction $x \mapsto x^{n-1} \ln(1 + \frac{1}{x})$.

Exercice IX-22

Soit f la fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{2(2x - 3)}.$$

Déterminer les primitives F de f .

Exercice IX-23

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos(2t)^2$. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos(3t) \sin(t)$. Donner les primitives de f .

Exercice IX-24

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. f définie sur $I =]3 ; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-3}}$.
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice IX-25

On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2(x-1)}{x+1} \end{aligned}$$

où $\mathcal{D}_f$ est un ensemble que l'on déterminera.

Montrer que la fonction f admet une réciproque dont on déterminera la dérivée. On pensera à déterminer les différents ensembles utiles.

IX-4.2 Théorème de Rolle

Exercice IX-26

Soit $a > 0$ un nombre réel et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; a]$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$.

Montrer que f' s'annule sur $]0 ; a[$.

Exercice IX-27

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a ; b]$ et telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a ; b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Exercice IX-28

On considère $f : [a ; b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.

1. On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a ; b]$. Démontrer qu'il existe $c \in]a ; b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. On suppose que $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 = f(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in]a ; b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice IX-29

Soit p un polynôme, montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

On pourra même montrer que le nombre de solutions est inférieur à $\deg(P) + 1$.

IX-4.3 Accroissements finis

Exercice IX-30

Soit f une fonction continue dérivable sur $]a ; +\infty[$ admettant le réel l pour limite en $+\infty$.

Montrer que si sa fonction dérivée f' admet une limite en $+\infty$, alors cette limite est 0.

Exercice IX-31

Soient une fonction f définie sur $] -1 ; 1[$, dérivable en 0, et des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent vers 0 et telles que, pour tout entier n :

$$-1 < a_n < 0 < b_n < 1.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f'(0)$.

Exercice IX-32

Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ admettant des limites réelles en $-\infty$ et en $+\infty$, alors f'' s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice IX-33

Soit f une application dérivable sur un intervalle I et à dérivée bornée sur I .

Montrer que f est lipschitzienne.

IX-4.4 Formules de Taylor et développements limités

Exercice IX-34

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que la fonction f est continue en 0. Est-elle dérivable en 0 ? Est-elle $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Indication : on pourra utiliser les formules de Taylor-Young des fonctions trigonométriques pour justifier certains résultats connus sur les limites.

Exercice IX-35

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle I et soit $a \in I$ qui ne soit pas une borne de I .

Calculer la limite quand h tend vers 0 de :

$$\frac{1}{h^3} (f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)).$$

Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor-Young.

Exercice IX-36

Montrer que pour $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan x \geq x + \frac{x^3}{3}.$$

Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange.

Exercice IX-37

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto xe^{(x^2)}. \end{aligned}$$

1. Montrer que la fonction f admet une réciproque, que l'on notera f^{-1} .
2. Déterminer le développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

Indication : on pourra montrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'écrire sous la forme de son développement limité et identifier en utilisant l'égalité $f \circ f^{-1} = \text{Id}$ ou $f^{-1} \circ f = \text{Id}$.

Exercice IX-38

Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = -\frac{x + \cos(x) - e^x}{x - \ln(x+1)}.$$

Indication : on effectuera un développement limité en 0 à l'ordre 4 du numérateur et du dénominateur.

IX-5 Convexité

Exercice IX-39

Montrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est à la fois convexe et concave si et seulement si c'est une fonction affine.

Indication : pour montrer qu'une telle fonction est affine, on pourra introduire 0, 1 et x et étudier la convexité et concavité suivant la position de x par rapport à 0 et 1.

Exercice IX-40

Que dire de la somme de deux fonctions convexes ? Et que dire d'une combinaison linéaire de deux fonctions convexes ?

Exercice IX-41

Soit f une fonction convexe positive telle qu'il existe $a < b$ deux réels tels que $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer que la fonction f est nulle sur $[a; b]$.

Exercice IX-42

1. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et soit g une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $g \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe, alors f est convexe.

Exercice IX-43

1. Soit f une application convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

2. Donner un exemple de fonction convexe majorée sur $]1; +\infty[$ et qui ne soit pas constante.

Exercice IX-44

Soit f une fonction convexe sur $]0; +\infty[$.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite réelle ou égale à $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si cette limite est un réel l , alors l'application $x \mapsto f(x) - lx$ admet quand x tend vers $+\infty$ une limite réelle ou égale à $-\infty$.

Exercice IX-45

En considérant la fonction

$$\begin{aligned} f :]1; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(\ln(x)) \end{aligned}$$

montrer que nous avons :

$$\forall (x, y) \in]1; +\infty[, \quad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice IX-46

Montrer que pour tous réels a et b tels que $0 < b \leq a$ nous avons :

$$\frac{a-b}{a} \leq \ln\left(\frac{a}{b}\right) \leq \frac{a-b}{b}.$$

IX-6 Étude de fonctions

Exercice IX-47

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période π , telle que

$$f(t) = \frac{\pi}{2}t \quad \text{pour } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f en 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Exercice IX-48

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, impaire, périodique de période 2, définie sur $[0; 1]$ par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} f(t) = t^2 & 0 \leq t < 1 \\ f(1) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.