CPES Chapitre X

Fonctions de référence

année scolaire 2020-2021

X-1 Fonctions exponentielles et logarithmes

X-1.1 Pour se rafraîchir les idées...

Exercice X-1

Parmi les relations ci-dessous, quelles sont celles qui sont correctes ?

1. $(a^b)^c = a^{bc}$.
2. $a^b a^c = a^{bc}$.
3. $a^{2b} = (a^2)^b$.
4. $(ab)^c = a^{\frac{c}{2}} b^{\frac{c}{2}}$.
5. $(a^b)^c = a^{b^c}$.
6. $(a^b)^c = (a^c)^b$.

Exercice X-2

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x) = 2$.
2. $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln(2)$.
3. $\mathrm{e}^x = 2$.
4. $7\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^{-x} - 11 = 0$.
5. $\ln(1+x) = 2$.
6. $(\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3 = 0$.
7. $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 = 0$.

Exercice X-3

Montrer que pour tout réel $x \in]0\ ;\ 1[$ nous avons

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Indication : *étudier la convexité de la fonction $x \mapsto x\ln x$.*

Exercice X-4

Soit x un nombre réel strictement positif. Simplifier

$$\left(\exp(x^2)\right)^{\frac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}.$$

Exercice X-5

Comparer

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} (x^x)^x.$$

Exercice X-6

Déterminer les limites :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

Exercice X-7

Résoudre les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e} + 1$.
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

X-1.2 Fonctions exponentielles

Exercice X-8

Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Exercice X-9

Montrer que la fonction exponentielle n'est pas une fonction rationnelle.

Indication : *raisonner par l'absurde en suppoant $P(X) = Q(X)\mathrm{e}^X$, avec P et Q deux polynômes, puis dériver cette égalité.*

Exercice X-10

1. Montrer que pour tout $t > 1$, nous avons
$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t.$$
2. Montrer que pour tous x et y positifs, nous avons
$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^y < \mathrm{e}^x < \left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y}.$$

Exercice X-11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0.$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Indication : *on pourra prouver par récurrence que pour tout entier n, f est de classe $\mathscr{C}^n$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ et pour tout réel x non nul : $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.*

Exercice X-12

Résoudre l'équation

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x.$$

X-1.3 Fonctions logarithmes

Exercice X-13

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} \end{array}$$

est croissante.

Indication : *on pourra montrer que* $\ln \circ f$ *est croissante.*

Exercice X-14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$\ln(x^2-1) - \ln(2x-1) + \ln(2) = 0$$
$$\log_n(x+2) - \log_n(x+1) = \log_n(x-1)$$

où n est un réel strictement positif différent de 1.

Exercice X-15

Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$\log_x(10) = 2\log_{10x}(10) + 3\log_{100x}10.$$

Indication : *On rappelle que* $\log_a(x) = \log_a(b) \times \log_b(x)$ *et on pourra poser* $X = \log(x)$ *où* $\log(x)$ *désigne le logarithme décimal, c'est à dire* $\log_{10}$.

Exercice X-16

Étant donnés a et b deux réels strictement plus grands que 1, montrer que l'on a :

$$\ln \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Indication : *étudier la convexité de la fonction* $x \mapsto \ln(\ln x)$.

Exercice X-17

Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$ nous avons

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Exercice X-18

Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale d'un entier n strictement positif est

$$E\left(\log_{10}(n)\right) + 1$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice X-19

Simplifier les expressions suivantes :

1. $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$.
2. $\log_x(\log_x x^{(x^y)})$.

X-1.4 Croissances comparées

Exercice X-20

1. Montrer que si P est un polynôme de degré n, alors
$$\lim_{x\to+\infty} x^{-n}P(x) \neq 0.$$
2. Montrer que la fonction logarithme n'est pas une fonction rationnelle.
Indication : *on pourra raisonner par l'absurde.*

Exercice X-21

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$ avec $1 < a < b$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}}$ avec $1 < a$.

X-2 Fonctions circulaires

X-2.1 Fonctions trigonométriques

Exercice X-22

Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi]$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.
2. $2\sin\left(4t - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.
3. $\cos(t) \geqslant \frac{1}{2}$.
4. $2\sin(t) \leqslant \sqrt{2}$.

Exercice X-23

En remarquant que l'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos\frac{\pi}{8}$.

Exercice X-24

Donner la période des fonctions numériques de la variable réelle t définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(t) = \cos(2t); \quad f_2(t) = 2\cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$f_3(t) = \cos(2t) - 2\sin(3t).$$

Exercice X-25

1. Déterminer les nombres réels constants α et φ, avec $\alpha > 0$ et $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, tels que pour tout nombre réel t,
$$\cos(3t) + \sin(3t) = \alpha\cos(3t - \varphi).$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\cos(3t) + \sin(3t) = 0.$$

Exercice X-26

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$:

1. $\cos(x) + \cos(2x) = \sin(3x)$.
2. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = \sin 2x$.

Exercice X-27
Linéariser :

1. $\cos^2 x$.
2. $\cos x \sin^2 x$.
3. $\cos^2 x \sin^2 x$.
4. $\cos a \cos b$.
5. $\cos a \cos b \cos c$.

Exercice X-28
Développer :

1. $\cos 3a$.
2. $\tan(a+b+c)$.

Exercice X-29
Simplifier $\dfrac{\cos x - \cos y}{\sin x + \sin y}$. En déduire $\tan \frac{\pi}{24}$.

Exercice X-30

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 0$.
2. Développer $\cos(3x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4\cos^3(x) - 3\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Exercice X-31
Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'équation :

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donner les solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice X-32
Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ l'équation :

$$\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice X-33
Linéariser :

1. $2\cos^2\theta$.
2. $2\sin^2\theta$.
3. $4\cos^3\theta$.
4. $4\sin^3\theta$.
5. $8\cos^4\theta$.
6. $8\sin^4\theta$.
7. $32\cos^6\theta$.
8. $32\sin^6\theta$.
9. $32\cos^4\theta\sin^2\theta$.
10. $32\sin^4\theta\cos^2\theta$.
11. $16\cos\theta\sin^4\theta$.
12. $16\sin\theta\cos^4\theta$.

Exercice X-34
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

Exercice X-35
Résoudre $1 - \sin(3x) = 0$.

X-2.2 Fonctions circulaires réciproques

Exercice X-36
Calculer :

1. $\arccos\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$.
2. $\arccos\left(\cos\dfrac{-2\pi}{3}\right)$.
3. $\arccos\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

Exercice X-37
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\tan(\arcsin x)$.
2. $\sin(\arccos x)$.
3. $\cos(\arctan x)$.

Exercice X-38
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(2\arccos x)$.
2. $\cos(2\arcsin x)$.
3. $\sin(2\arccos x)$.
4. $\cos(2\arctan x)$.
5. $\sin(2\arctan x)$.
6. $\tan(2\arcsin x)$.

Exercice X-39
Calculer les écritures suivantes :

1. $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$.
2. $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2+\sqrt{3})$.
3. $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65}$.

Exercice X-40
Soit f la fonction définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \end{array}.$$

1. Quel est l'ensemble de définitionn de f ?
2. En posant $x = \sin t$, simplifier l'écriture de f.

Exercice X-41
Pour tout entier naturel n, on pose f_n et g_n les fonctions définies par

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(n\arccos(x)) \end{array}$$

et

$$g_n : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}.$$

Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

X-3 Fonctions hyperboliques

Exercice X-42
Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$5\text{ch}\,x - 4\text{sh}\,x = 3.$$

Indication : *poser* $X = \mathrm{e}^x$ *ou bien* $t = \text{th}\,\frac{x}{2}$.

Exercice X-43

Linéariser et dériver la fonction

$$f : x \longmapsto \operatorname{ch}^4 x . \operatorname{sh}^2 x.$$

Exercice X-44

Simplifier

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \frac{x}{2^k}.$$

En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} u_n.$$

Indication : *exprimer* $\operatorname{ch} x$ *en fonction de* $\operatorname{sh} x$.

Exercice X-45

Étant donné deux réels a et b, et un entier naturel n, calculer :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb).$$

Indication : *faire apparaître des sommes géométriques.*

Exercice X-46

Simplifier l'expression

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}\right).$$

Exercice X-47

Simplifier

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} \operatorname{th}\left(2^k x\right).$$

En déduire

$$\lim_{x \to +\infty} u_n.$$

Indication : *pour* $x \neq 0$, *écrire* $2^k \operatorname{th}(2^k x)$ *sous la forme* $f(2^{k+1}) - f(2^k)$.

Exercice X-48

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\operatorname{ch}(\operatorname{Arg}\operatorname{sh} x)$.
2. $\operatorname{th}(\operatorname{Arg}\operatorname{sh} x)$.
3. $\operatorname{sh}(2\operatorname{Arg}\operatorname{sh} x)$.
4. $\operatorname{sh}(\operatorname{Arg}\operatorname{ch} x)$.
5. $\operatorname{th}(\operatorname{Arg}\operatorname{ch} x)$.
6. $\operatorname{ch}(\operatorname{Arg}\operatorname{th} x)$.

Exercice X-49

On considère l'équation

$$\operatorname{Arg}\operatorname{sh}(x) + \operatorname{Arg}\operatorname{ch}(x) = 1.$$

Justifier que cette équation admet une unique solution, puis déterminer cette dernière.